Nome e Cognome : ______________________________ *Num. Matr. :* ______________

Probabilità e Statistica I (11/7/2009)

(Ing. Civile, canali I,II - Ing. dei Trasporti - Roma)

1. Utilizzando un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere si fanno due tipi di esperimenti: (a) estrazioni con restituzione; (b) estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"la prima pallina estratta è bianca"*, $B =$ *"la seconda pallina estratta è bianca"*, stabilire in quale esperimento è maggiore la probabilità dell'evento condizionato $B|(A \vee B)$.

   esperimento n. ?

2. Sia T il triangolo di vertici i punti $(0,1), (3,0), (3,2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = \frac{xy}{6}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Definiti gli eventi $H = (X \geq \frac{3}{2})$, $E = (\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{2})$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E|H$.

   $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la varianza di X.

   $Var(X) =$

4. Da un'urna di composizione incognita si deve estrarre una pallina; sulla composizione dell'urna ci sono due ipotesi possibili: $H =$ *"nell'urna ci sono 2 palline bianche e 4 nere"*; $H^c =$ *"nell'urna ci sono 4 palline bianche e 2 nere"*, con $P(H) = \frac{2}{3}$. Definito l'evento $E =$ *"la pallina estratta è bianca"*, calcolare la differenza δ tra la probabilità dell'evento condizionato $H|E$ e quella di $H^c|E$.

   $\delta =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/7/2009.

1. Nel caso (a) si ha

$$P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(A^cB^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{4}{25}, \quad P[B|(A \vee B)] = \frac{P(B)}{P(A \vee B)} = \frac{P(B)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{5}{7}.$$

Nel caso (b), osservando che $P(B^c|A^c) = \frac{1}{4}$, si ha

$$P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(A^cB^c) = \frac{1}{10}, \quad P[B|(A \vee B)] = \frac{P(B)}{P(A \vee B)} = \frac{P(B)}{1 - P(A^cB^c)} = \frac{2}{3} < \frac{5}{7}.$$

Pertanto, la probabilità dell'evento condizionato $B|(A \vee B)$ è maggiore nel caso (a), in cui si effettuano estrazioni con restituzione (*tale risultato dipende dal fatto che $P(A \vee B)$ è minore nel caso (a)*).

2. La retta passante per i punti $(0, 1), (3, 0)$ ha equazione $y = -\frac{x}{3} + 1$, mentre la retta passante per i punti $(0, 1), (3, 2)$ ha equazione $y = \frac{x}{3} + 1$. Allora

$$P(H) = \frac{1}{6} \int_{\frac{3}{2}}^{3} dx \int_{-\frac{x}{3}+1}^{\frac{x}{3}+1} xy dy = \frac{1}{9} \int_{\frac{3}{2}}^{3} x^2 dx = \cdots = \frac{7}{8}.$$

Inoltre

$$P(EH) = P\left(\frac{1}{2} \leq Y \leq \frac{3}{2}, X \geq \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} \int_{\frac{3}{2}}^{3} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} xy dy = \frac{1}{12} \int_{\frac{3}{2}}^{3} 2x dx = \cdots = \frac{9}{16};$$

pertanto: $P(E|H) = \frac{P(EH)}{P(H)} = \frac{9}{14}$.

3. Si ha $X \in [0, 3]$, con $f_1(x) = \frac{1}{6} \int_{-\frac{x}{3}+1}^{\frac{x}{3}+1} xy dy = \cdots = \frac{x^2}{9}, \quad x \in [0, 3]$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^3 x f_1(x) dx = \cdots = \frac{9}{4}; \quad \mathbb{P}(X^2) = \int_0^3 x^2 f_1(x) dx = \cdots = \frac{27}{5}.$$

Pertanto: $Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{27}{80}$.

4. Si ha

$$P(E|H) = \frac{1}{3}, \quad P(E|H^c) = \frac{2}{3}, \quad P(E) = P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9};$$

$$P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}; \quad P(H^c|E) = 1 - P(H|E) = \frac{1}{2};$$

pertanto: $\delta = 0$.