Probabilità e Statistica (17/07/2010)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un gruppo di 6 studenti, dei quali 2 sanno risolvere un certo quesito, ne vengono estratti a caso 4. Successivamente, il quesito viene sottoposto ad uno dei 4 studenti (scelto a caso). Siano definiti gli eventi H_r = *"fra i 4 studenti estratti a caso ve ne sono r che sanno risolvere il quesito"*, $r = 0, 1, 2$; A = *"lo studente scelto a caso non sa risolvere il quesito"*. Supposto vero A, calcolare la probabilità condizionata p che solo uno dei rimanenti 3 studenti sappia risolvere il quesito.

   $p =$

2. Da un'urna, contenente inizialmente 4 palline bianche e 4 nere, si effettuano 3 estrazioni a caso, togliendo ogni volta una pallina e sostituendola con una di colore opposto. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se gli eventi intersezione E_1E_2, E_1E_3 ed E_2E_3 sono equiprobabili.

   $E_1E_2\,,\ E_1E_3\,,\ E_2E_3$ *equiprobabili?*

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $0 \leq y \leq \frac{x}{2}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k, la previsione di X e la previsione di Y.

   $k =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(Y) =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se X e Y sono incorrelati e calcolare la probabilità p dell'evento $(X + Y \leq 3)$.

   X, Y *incorrelati?* $\qquad$ $p =$

5. Con riferimento all'esercizio 2, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi(t) =$

6. Con riferimento all'esercizio 3, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per ogni $z > 0$.

   $h_Z(z) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 4$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 0$, stabilire per quale valore θ_0 risulta $P(-\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(1) - 1$.

   $\theta_0 =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 17/07/2010.

1. Si ha: $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{4}{4-r}}{\binom{6}{4}}\,, \quad r = 0,1,2\,;$ quindi

$$P(H_0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{4}}{\binom{6}{4}} = \frac{1}{15}\,, \quad P(H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{8}{15}\,, \quad P(H_2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{2}}{\binom{6}{4}} = \frac{6}{15}\,;$$

inoltre: $P(A|H_0) = 1\,, \quad P(A|H_1) = \frac{3}{4}\,, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}$. Allora

$$P(A) = P(A|H_0)P(H_0) + P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) = 1 \cdot \frac{1}{15} + \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{15} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{15} = \frac{2}{3}\,;$$

pertanto: $p = P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}\,.$

2. Si ha $P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{16}$; inoltre

$$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3)\,,\; P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3)\,,$$

con

$$\begin{aligned} P(E_1E_2E_3) &= P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{3}{64}\,, \\ P(E_1E_2^cE_3) &= P(E_1)P(E_2^c|E_1)P(E_3|E_1E_2^c) = \frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{10}{64}\,, \\ P(E_1^cE_2E_3) &= P(E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2) = \frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{10}{64}\,; \end{aligned}$$

quindi: $P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{3}{64} + \frac{10}{64} = \frac{13}{64} \neq \frac{3}{16}$; pertanto gli eventi E_1E_2, E_1E_3 ed E_2E_3 non sono equiprobabili.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = k\int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-x-y}dy = 1$; quindi

$$k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y}dy = \cdots = k\int_0^{+\infty} e^{-x}dx - \frac{2}{3}k\int_0^{+\infty}\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx = k\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{k}{3} = 1\,;$$

pertanto: $k = 3$. Inoltre

$$f_1(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} 3e^{-x-y}dy = 3e^{-x}\int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y}dy = 3e^{-x}(1-e^{-\frac{x}{2}})\,,\; x \geq 0\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$I\!P(X) = \int_0^{+\infty} 3xe^{-x}(1-e^{-\frac{x}{2}})dx = 3\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx - 2\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}dx = 3 - 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{3}\,.$$

Infine

$$f_2(y) = \int_{2y}^{+\infty} 3e^{-x-y}dx = 3e^{-y}\int_{2y}^{+\infty} e^{-x}dx = 3e^{-3y}\,,\; y \geq 0\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove; ovvero, Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 3$; quindi: $I\!P(Y) = \frac{1}{3}$.

4. Osservando che $\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$, $\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$, $\forall\,\lambda>0$,
$$\int_0^{\frac{x}{2}} ye^{-y}dy = [-ye^{-y}]_0^{\frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-y}dy = 1-e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}\,,$$
segue
$$I\!P(XY) = \int_0^{+\infty} dx \int_0^{\frac{x}{2}} 3xye^{-x-y}dy = \int_0^{+\infty}\left(3xe^{-x}\int_0^{\frac{x}{2}} ye^{-y}dy\right)dx = \int_0^{+\infty} 3xe^{-x}(1-e^{-\frac{x}{2}}-\frac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}})dx =$$
$$= 3\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx - 2\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}x}dx - \int_0^{+\infty} x^2\cdot\frac{3}{2}\,e^{-\frac{3}{2}x}dx = 3-2\cdot\frac{2}{3}-2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9} \neq \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3} = I\!P(X)I\!P(Y)\,;$$
quindi X e Y sono correlati.
Inoltre, osservando che l'evento $(X+Y\leq 3)$ coincide con l'evento $(X,Y)\in A$, dove $A=\{(x,y): 0\leq y\leq 1, 2y\leq x\leq 3-y\}$, segue
$$p = P[(X,Y)\in A] = \int\int_A f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy\int_{2y}^{3-y} 3e^{-x-y}dx = \int_0^1\left(3e^{-y}\int_{2y}^{3-y} e^{-x}dx\right)dy =$$
$$= \int_0^1 3e^{-y}(e^{-2y}-e^{-3+y})dx = \int_0^1 3e^{-3y}dy - 3e^{-3}\int_0^1 dx = 1-e^{-3}-3e^{-3} = 1-4e^{-3}\,.$$

5. Si ha $X\in\{0,1,2,3\}$, con $P(X=0) = P(E_1^cE_2^cE_3^c) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{8} = \frac{3}{64} = P(E_1E_2E_3) = P(X=3)$; inoltre,
$$P(X=1) = P(E_1E_2^cE_3^c)+P(E_1^cE_2E_3^c)+P(E_1^cE_2^cE_3) = \frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{29}{64}\,,$$
$$P(X=2) = P(E_1E_2E_3^c)+P(E_1E_2^cE_3)+P(E_1^cE_2E_3) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{8} = \frac{29}{64}\,.$$
Pertanto: $\varphi(t) = \sum_{h=0}^3 p_h\,e^{itx_h} = \frac{3+29e^{it}+29e^{2it}+3e^{3it}}{64}$.

6. Fissato $z>0$, si ha $h_Z(z) = -\frac{S_Z'(z)}{S_Z(z)}$, con $S_Z(z) = 1-F_Z(z)$ e con
$$F_Z(z) = P(Z\leq z) = P(X+Y\leq z) = P(Y\leq z-X) = P[(X,Y)\in A]\,,$$
dove $A=\{(x,y): 0\leq y\leq\frac{z}{3}, 2y\leq x\leq z-y\}$. Pertanto
$$F_Z(z) = \int_0^{\frac{z}{3}} dy\int_{2y}^{z-y} 3e^{-x-y}dx = \int_0^{\frac{z}{3}} 3e^{-y}(e^{-2y}-e^{-z+y})dy = \int_0^{\frac{z}{3}} 3e^{-3y}dy - 3e^{-z}\int_0^{\frac{z}{3}} dy = 1-e^{-z}-ze^{-z}\,.$$
Allora $S_Z(z) = e^{-z}+ze^{-z}$, $S_Z'(z) = -e^{-z}+e^{-z}-ze^{-z} = -ze^{-z}$; pertanto, pr ogni $z>0$, si ha: $h_Z(z) = \frac{ze^{-z}}{e^{-z}+ze^{-z}} = \frac{z}{1+z}$.

7. Si ha $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $m_4=0$ in quanto $\overline{x}=m_0=0$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{4}{\sigma^2} = \frac{1}{16}+1 = \frac{17}{16}$ e quindi $\sigma_4 = \frac{4}{\sqrt{17}}$. Pertanto $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{0,\frac{4}{\sqrt{17}}}$. Allora
$$P(-\theta_0\leq\Theta\leq\theta_0\mid\mathbf{x}) = \Phi_{0,\frac{4}{\sqrt{17}}}(\theta_0) - \Phi_{0,\frac{4}{\sqrt{17}}}(-\theta_0) = \Phi\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\theta_0\right)-1 = 2\Phi(1)-1 \iff \Phi\left(\frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0\right) = \Phi(1) \iff \frac{\sqrt{17}}{4}\theta_0 = 1 \iff \theta_0 = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sigma_4\,.$$