Probabilità e Statistica (13/11/2010)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; esame da 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Sulla composizione di un'urna, contenente 100 palline, si fanno due ipotesi: (i) le palline bianche sono 20 e le nere 80 (ipotesi H); (ii) le palline bianche sono 10 e le nere 90 (ipotesi H^c). Dall'urna si effettuano un numero aleatorio X di estrazioni con restituzione fino alla prima uscita di pallina bianca. Definito l'evento $E = (X > 10)$ e posto $P(H) = \alpha$, calcolare i valori di α tali che $P(H \mid E) > \frac{3}{4}$; (*si noti che* $(\frac{8}{9})^{10} \simeq 0.30795$).

   $\alpha \in$

2. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione normale di parametri $m_X = 1$, $\sigma_X = 1$, $m_Y = 2$, $\sigma_Y = 2$, sia $Z = 2X - Y$. Determinare la previsione e lo scarto standard di Z; inoltre, assumendo che Z abbia una distribuzione di tipo normale, calcolare la probabilità condizionata $p = P(E|H)$, dove $E = (Z \geq 0)$, $H = (-2\sqrt{2} \leq Z \leq 4\sqrt{2})$.

   $m_Z =$ $\qquad$ $\sigma_Z =$ $\qquad$ $p =$

3. Uno studente risponde a caso ad un test costituito da 4 domande a risposta multipla con 3 risposte possibili per ogni domanda, di cui una sola esatta. Per superare il test occorre rispondere esattamente ad almeno 3 domande. Sia X il numero aleatorio di *risposte esatte* date dallo studente ed A l'evento *"lo studente supera il test"*. Calcolare la previsione m di X e la probabilità condizionata $p = P(A \mid X > 1)$. (*Suggerimento: utilizzare gli eventi equiprobabili e indipendenti* $E_k =$ "la risposta alla k-ma domanda è esatta", $k = 1, \ldots, 4$)

   $m =$ $\qquad$ $p =$

4. Una barra di lunghezza 10 cm viene misurata 8 volte con uno stesso strumento di misura, il quale ogni volta genera un errore di misura con distribuzione normale standard. Siano $X_1, \ldots, X_8$ i valori a priori aleatori delle misure ottenute; inoltre, si assuma che gli errori di misura $Y_1, \ldots, Y_8$ siano stocasticamente indipendenti. Calcolare la previsione e la varianza della media aritmetica $\overline{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_8}{8}$.

   $\mathbb{P}(\overline{X}) =$ $\qquad$ $Var(\overline{X}) =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $\overline{X}$ (*ricordiamo che per una distribuzione normale standard la funzione caratteristica è* $e^{-\frac{t^2}{2}}$).

   $\varphi_{\overline{X}}(t) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = 2ye^{-2x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $y > 0$, la funzione di rischio di Y.

   $h_2(y) =$

7. Dati 3 eventi scambiabili, E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_1E_2) = \frac{5}{18}, P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{6}$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E_2^c \mid E_1^c E_3$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 13/11/2010.

1. Il numero aleatorio X condizionatamente ad H (risp., H^c) ha una distribuzione geometrica di parametro $p = 0.2$ (risp., $p = 0.1$) e, osservando che $P(X > n) = q^n$, segue

$$P(E \,|\, H) = P(X > 10 \,|\, H) = 0.8^{10}\,, \quad P(E \,|\, H^c) = P(X > 10 \,|\, H^c) = 0.9^{10}\,.$$

Allora

$$P(H \,|\, E) = \frac{P(E \,|\, H)P(H)}{P(E \,|\, H)P(H) + P(E \,|\, H^c)P(H^c)} = \frac{0.8^{10}\alpha}{0.8^{10}\alpha + 0.9^{10}(1-\alpha)} = \frac{8^{10}\alpha}{8^{10}\alpha + 9^{10}(1-\alpha)}\,.$$

Quindi

$$P(H \,|\, E) > \frac{3}{4} \iff \alpha > \frac{3 \times 9^{10}}{3 \times 9^{10} + 8^{10}} = \frac{3}{3 + (\frac{8}{9})^{10}} \simeq \frac{3}{3 + 0.30795} \simeq 0.9069\,.$$

2. Essendo una combinazione lineare dei n. a. X, Y che sono indipendenti e con distribuzione normale, si può dimostrare che Z ha una distribuzione normale di parametri

$$m_Z = \mathbb{P}(Z) = 2m_X - m_Y = 0\,, \quad \sigma_Z = \sqrt{Var(Z)} = \sqrt{4Var(X) + Var(Y)} = 2\sqrt{2}\,;$$

ovvero: $Z \sim N_{0,2\sqrt{2}}$. Inoltre, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413\,,\ \Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P(Z \geq 0 \mid -2\sqrt{2} \leq Z \leq 4\sqrt{2}) = \frac{P(0 \leq Z \leq 4\sqrt{2})}{P(-2\sqrt{2} \leq Z \leq 4\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{\Phi(2) - \Phi(0)}{\Phi(2) - \Phi(-1)} \simeq \frac{0.9772 - 0.5}{0.9772 - 1 + 0.8413} \simeq 0.5830.$$

3. Si ha $X = \sum_{k=1}^{4} |E_k| \sim B(4, \frac{1}{3})$. Pertanto $m = \mathbb{P}(X) = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. Inoltre

$$p = P(A \,|\, X > 1) = P(X \geq 3 \,|\, X > 1) = \frac{P(X \geq 3, X > 1)}{P(X > 1)} = \frac{P(X \geq 3)}{1 - P(X \leq 1)} =$$

$$= \frac{1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)}{1 - P(X = 0) - P(X = 1)} = \cdots = \frac{3}{11}\,.$$

4. Si ha $X_i = Y_i + 10 \sim N_{10,1}$; inoltre, per $i \neq j$, risulta $Cov(X_i, X_j) = Cov(Z_i, Z_j) = 0$. Allora

$$\mathbb{P}(\overline{X}) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_i X_i}{8}\right) = \frac{\sum_i \mathbb{P}(X_i)}{8} = 10\,;$$

$$Var(\overline{X}) = \frac{1}{64}Var(X_1 + \cdots + X_8) = \frac{1}{64}(\sum_i Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)) = \frac{1}{8}\,.$$

5. Dall'ipotesi di indipendenza stocastica di $Y_1, \dots, Y_8$ segue

$$\varphi_{Y_1+\cdots+Y_8}(t) = \varphi_{Y_1}(t)\cdots\varphi_{Y_8}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdots e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-4t^2}\,;$$

inoltre, essendo $\overline{X} = \frac{X_1+\cdots+X_8}{8} = \frac{Y_1+\cdots+Y_8}{8} + 10$, si ottiene

$$\varphi_{\overline{X}}(t) = \mathbb{P}(e^{i\overline{X}t}) = \mathbb{P}(e^{i(\frac{Y_1+\cdots+Y_8}{8}+10)t}) =$$

$$= e^{10it}\mathbb{P}(e^{i(Y_1+\cdots+Y_8)\frac{t}{8}}) = e^{10it}\varphi_{Y_1+\cdots+Y_8}(\frac{t}{8}) = e^{10it}e^{-4(\frac{t}{8})^2} = e^{10it}e^{-\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}t\right)^2}{2}} = e^{10it-\frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}t\right)^2}{2}}\,.$$

Ovvero: $\overline{X}$ ha una distribuzione normale di parametri $m = 10\,, \sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

6. Si ha

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} f(x,y)dx = \int_0^{+\infty} 2ye^{-2x-y}dx = ye^{-y}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx = ye^{-y}\,,\ y \geq 0\,;$$

inoltre

$$S_2(y) = \int_y^{+\infty} te^{-t}dt = \left[-te^{-t}\right]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} e^{-t}dt = ye^{-y} + [-e^{-t}]_y^{+\infty} = ye^{-y} + e^{-y}\,.$$

Pertanto

$$h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{ye^{-y}}{ye^{-y}+e^{-y}} = \frac{y}{y+1}\,,\ y \geq 0\,.$$

7. Dall'ipotesi di scambiabilità segue: $P(E_3) = P(E_1)$, $P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = P(E_1E_2)$; allora

$$p = P(E_2^c \,|\, E_1^cE_3) = 1 - P(E_2 \,|\, E_1^cE_3) = 1 - \frac{P(E_1^cE_2E_3)}{P(E_1^cE_3)} = 1 - \frac{P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3)}{P(E_3) - P(E_1E_3)} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{5}{18} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} - \frac{5}{18}} = 1 - \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.$$