Probabilità e Statistica (19/02/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna contenente 3 palline bianche e 2 nere si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \ldots$, e posto $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$, $Y = |E_1| + |E_2|$, calcolare la covarianza di X, Y e la probabilità α dell'evento condizionato $(E_1 E_2 \,|\, X = 2)$.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. La distribuzione di probabilità della lunghezza aleatoria X (in *cm*) di una barra è (approssimata con una distribuzione) normale di parametri $m = 10$, $\sigma = 0.1$. Calcolare: (i) la probabilità $\alpha = P(X > 10.2)$; (ii) la probabilità condizionata $\beta = P(X \leq 10 \,|\, 9.8 < X \leq 10.1)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = x + y$, per $(x, y) \in [0, a] \times [0, a]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Determinare: (i) la costante positiva a; (ii) i valori non negativi di α tali che $P(Y > \alpha X) > \frac{1}{2}$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha \in$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione di X e il valore x_M tale che $P(X \leq x_M) = P(X > x_M)$.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $x_M =$

5. Le ipotesi possibili sulla composizione incognita di un lotto L, contenente 5 pezzi, sono due: (H) i pezzi buoni sono 4; (H^c) i pezzi buoni sono 3. Dal lotto si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi E_i = *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*, $i = 1, 2, 3$, e posto $P(H) = \frac{1}{2}$, calcolare $P(E_i), i = 1, 2, 3$, $P(H|E_1E_2)$ e $P(E_3|E_1E_2)$.

   $P(E_i) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(H|E_1E_2) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(E_3|E_1E_2) =$

6. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2|$.

   $\varphi_X(t) =$

7. Un sistema S è formato da due dispositivi in parallelo d_1 e d_2, con d_2 che entra in funzione nell'istante in cui si guasta d_1. Siano X e Y i tempi aleatori di durata (fino al guasto) di d_1 e d_2; inoltre, sia $Z = X + Y$ il tempo aleatorio di durata di S. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Fissato un intervallo $[t_1, t_2]$, con $0 < t_1 < t_2$, e indicando con λ_a la media armonica di λ_1, λ_2, calcolare l'insieme I dei valori di λ_a tali che si abbia $\mathbb{P}(Z) \in [t_1, t_2]$.

   $I =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 19/02/2011.

1. Si ha $P(E_i) = p = \frac{3}{5}$, $Var(|E_i|) = pq = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$, $Cov(E_i, E_j) = 0$ per $i \neq j$; quindi
$$Cov(X,Y) = Cov(Y + |E_3|, Y) = Cov(Y,Y) + Cov(|E_3|, |E_1| + |E_2|) =$$
$$= Cov(Y,Y) + Cov(|E_3|, |E_1|) + Cov(|E_3|, |E_2|) = Var(Y) = Var(|E_1|) + Var(|E_2|) = \frac{12}{25}\,.$$
Inoltre, osservando che $(X = 2) = E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3$, segue
$$\alpha = \frac{P[E_1E_2 \wedge (E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3)]}{P(E_1E_2E_3^c \vee E_1E_2^cE_3 \vee E_1^cE_2E_3)} = \frac{P(E_1E_2E_3^c)}{P(E_1E_2E_3^c) + P(E_1E_2^cE_3) + P(E_1^cE_2E_3)} = \frac{1}{3}\,.$$

2. Si ha
$$\alpha = 1 - P(X \leq 10.2) = 1 - \Phi_{10,0.1}(10.2) = 1 - \Phi\left(\frac{10.2 - 10}{0.1}\right) = 1 - \Phi(2) \simeq 0.0228\,;$$
$$\beta = P(X \leq 10 \,|\, 9.8 < X \leq 10.1) = \frac{P(X \leq 10, 9.8 < X \leq 10.1)}{P(9.8 < X \leq 10.1)} = \frac{P(9.8 < X \leq 10)}{P(9.8 < X \leq 10.1)} =$$
$$= \frac{\Phi_{10,0.1}(10) - \Phi_{10,0.1}(9.8)}{\Phi_{10,0.1}(10.1) - \Phi_{10,0.1}(9.8)} = \frac{\Phi(0) - \Phi(-2)}{\Phi(1) - \Phi(-2)} \simeq \frac{\frac{1}{2} - 1 + 0.9772}{0.8413 - 1 + 0.9772} \simeq 0.583\,.$$

3. Si ha
$$\int_0^a \int_0^a f(x,y)dxdy = \int_0^a \int_0^a (x+y)dxdy = \cdots = a^3 = 1\,;$$
pertanto: $a = 1$; quindi $f(x,y) = x + y$, per $0 \leq x, y \leq 1$. Inoltre, fissato $\alpha \in [0,1)$, si ha
$$P(Y \leq \alpha X) = \int_0^1 \int_0^{\alpha x} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^{\alpha x} dy = \cdots = \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{6} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)\;;$$
pertanto, tenendo conto che $P(Y \leq \alpha X)$ è una funzione crescente di α, si ottiene $P(Y > \alpha X) > \frac{1}{2} \iff \alpha \in [0,1)$.

4. Per ogni $x \in [0,1]$, si ha
$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora, si ha $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_1(x) = 1$ per $x \geq 1$; inoltre, per $x \in (0,1)$, si ha
$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x (t + \frac{1}{2})dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}\right]_0^x = \frac{x^2 + x}{2}\,.$$
Inoltre, si ha $P(X \leq x_M) = P(X > x_M)$ se e solo se $P(X \leq x_M) = F_1(x_M) = \frac{x_M^2 + x_M}{2} = \frac{1}{2}$, da cui segue $x_M = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Gli eventi sono scambiabili; pertanto

$$P(E_i) = P(E_1) = P(E_1|H)P(H) + P(E_1|H^c)P(H^c) = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{10}\,.$$

Inoltre

$$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H)P(E_2|E_1H) = \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{5}\,, \quad P(E_1E_2|H^c) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}\,;$$

quindi

$$P(H|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2|H)P(H)}{P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c)} = \frac{P(E_1E_2|H)}{P(E_1E_2|H) + P(E_1E_2|H^c)} = \frac{2}{3}\,.$$

Infine

$$P(E_3|E_1E_2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2)} = \frac{P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c)}{P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c)} =$$

$$= \frac{P(E_1E_2E_3|H) + P(E_1E_2E_3|H^c)}{P(E_1E_2|H) + P(E_1E_2|H^c)} = \frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}} = \frac{5}{9} \;<\; P(E_3)\,.$$

6. Si ha $X \in \{0,1,2\}$, con $X|H \sim H(5,2,\frac{4}{5})$, $X|H^c \sim H(5,2,\frac{3}{5})$; inoltre per ogni $k = 0,1,2$, si ha

$$P(X=k) = P(X=k|H)P(H) + P(X=k|H^c)P(H^c) = \frac{P(X=k|H) + P(X=k|H^c)}{2}\,.$$

Allora

$$P(X=0|H) = 0\,,\; P(X=1|H) = \frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}\,,\; P(X=2|H) = \frac{\binom{4}{2}\binom{1}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,,$$

$$P(X=0|H^c) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}\,,\; P(X=1|H^c) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}\,,\; P(X=2|H^c) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}\,,$$

$$P(X=0) = \frac{0+\frac{1}{10}}{2} = \frac{1}{20}\,,\; P(X=1) = \frac{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{2}\,,\; P(X=2) = \frac{\frac{3}{5}+\frac{3}{10}}{2} = \frac{9}{20}\,;$$

pertanto

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{2} p_k e^{ikt} = \frac{1 + 10e^{it} + 9e^{2it}}{20}\,.$$

7. Si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}dy = \cdots = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,,\; x \geq 0\,;\; f_1(x) = 0\,,\; x < 0\,;$$

$$f_2(y) = \int_0^{+\infty} \lambda_1\lambda_2 e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y}dx = \cdots = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,,\; y \geq 0\,;\; f_2(y) = 0\,,\; y < 0\,.$$

Allora

$$P(X) = \frac{1}{\lambda_1}\,,\;\; I\!P(Y) = \frac{1}{\lambda_2}\,,\;\; I\!P(Z) = I\!P(X) + I\!P(Y) = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\,.$$

Ricordando che $\lambda_a = \frac{2}{\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}}$, segue $I\!P(Z) = \frac{2}{\lambda_a} \in [t_1, t_2] \iff \frac{2}{t_2} \leq \lambda_a \leq \frac{2}{t_1}$; pertanto $I = [\frac{2}{t_2}, \frac{2}{t_1}]$.