

**Probabilità e Statistica** (9/4/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma; 3 o 4 crediti: esercizi 1,2,3,4)  
(6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati 3 eventi  $A, B, C$ , con  $A \cap (B \cup C) = \emptyset, P(A) = P(B) = P(C) = p, P(B|C) = \frac{1}{2}$ , calcolare: (i) i valori coerenti di  $p$ ; (ii) il valore di  $p$  tale che  $\alpha = P(A|B^c C^c) = \frac{2}{7}$ .

$$p \in \qquad p =$$

2. Dati due numeri aleatori continui  $X, Y$ , indipendenti e con distribuzione normale  $N_{0,\sigma}$ , calcolare la probabilità  $p$  dell'evento condizionato  $(X \leq \sigma, Y \leq 2\sigma) | (X \geq -2\sigma, Y \geq -\sigma)$  e la covarianza della coppia di numeri aleatori  $(X + Y, 2X - 2Y)$ .

$$p = \qquad Cov(X + Y, 2X - 2Y) =$$

3. Un operatore preleva a caso tre componenti da un lotto che contiene 3 pezzi buoni e 2 difettosi. Successivamente, l'operatore utilizza a caso due dei tre componenti, che risultano non difettosi (evento  $E$ ). Indicando con  $H_r$  l'evento "fra i tre componenti prelevati a caso dal lotto ce ne sono  $r$  difettosi",  $r = 0, 1, 2$ , calcolare  $P(E|H_1 \cup H_2)$  e  $P(H_0 | E)$ .

$$P(E|H_1 \cup H_2) = \qquad P(H_0 | E) =$$

4. Un numero aleatorio continuo  $X \in [-1, 3]$  ha una densità di probabilità  $f(x) = k(x + 1)$  per  $x \in [-1, 3]$ , con  $f(x) = 0$  altrove. Calcolare la costante  $k$  e il valore  $x_0$  tale che  $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = \frac{1}{4}$ .

$$k = \qquad x_0 =$$

5. Siano dati due lotti:  $L_1$ , contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso, ed  $L_2$ , contenente 5 pezzi buoni e 1 difettoso. Da ciascuno dei due lotti  $L_1$  ed  $L_2$  si prelevano a caso 2 pezzi formando un lotto  $L_3$  composto da 4 pezzi. Indicando con  $X$  il numero aleatorio di pezzi difettosi contenuti in  $L_3$ , calcolare la previsione  $m_X$ , lo scarto standard  $\sigma_X$  e la funzione caratteristica  $\varphi_X(t)$ .

$$m_X = \qquad \sigma_X = \qquad \varphi_X(t) =$$

6. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio  $\Theta$  è normale con parametri  $m_0 = 1, \sigma_0 = 3$ . Le componenti di un campione casuale  $(X_1, X_2, X_3)$ , subordinatamente ad ogni fissato valore  $\theta$  di  $\Theta$ , hanno una distribuzione normale con valor medio  $\theta$  e scarto standard  $\sigma = 1$ . Supposto di aver osservato un campione casuale  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , con  $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ , stabilire per quale valore  $\theta_0$  risulta  $P[(1 - \theta_0 \leq \Theta \leq 1 + \theta_0) | \mathbf{x}] = 2\Phi(2) - 1$ .

$$\theta_0 =$$

7. La densità congiunta di un vettore aleatorio  $(X, Y) \in [5, +\infty) \times [0, +\infty)$  è data da

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+2y)} & \text{per } x \geq 5, y \geq 0; \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare: (i) la costante  $k$ ; (ii) la funzione di sopravvivenza  $S_1(x)$  di  $X$ , per  $x > 5$ ; (iii) la funzione di rischio  $h_1(x)$  di  $X$ , per  $x > 5$ .

$$k = \qquad S_1(x) = \qquad h_1(x) =$$

1. Si ha

$$P[A \vee (B \vee C)] = P(A) + P(B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(BC) = 3p - \frac{1}{2}p = \frac{5}{2}p \leq 1;$$

pertanto:  $p \in [0, \frac{2}{5}]$ . Inoltre

$$A \subseteq B^c C^c, \quad P(B^c C^c) = 1 - P(B \vee C) = 1 - P(B) - P(C) + P(BC) = 1 - 2p + \frac{1}{2}p = 1 - \frac{3}{2}p;$$

allora

$$\alpha = P(A|B^c C^c) = \frac{P(A)}{P(B^c C^c)} = \frac{p}{1 - \frac{3}{2}p} = \frac{2p}{2 - 3p} = \frac{2}{7} \iff p = \frac{1}{5}.$$

2. Si ha:

$$p = P[(X \leq \sigma, Y \leq 2\sigma) | (X \geq -2\sigma, Y \geq -\sigma)] = \frac{P(-2\sigma \leq X \leq \sigma, -\sigma \leq Y \leq 2\sigma)}{P(X \geq -2\sigma, Y \geq -\sigma)} = \frac{P(-2\sigma \leq X \leq \sigma)P(-\sigma \leq Y \leq 2\sigma)}{P(X \geq -2\sigma)P(Y \geq -\sigma)},$$

con

$$P(X \geq -2\sigma) = 1 - \Phi_{0,\sigma}(-2\sigma) = 1 - \Phi(-2) = \Phi(2) \simeq 0.9772,$$

$$P(Y \geq -\sigma) = 1 - \Phi_{0,\sigma}(-\sigma) = 1 - \Phi(-1) = \Phi(1) \simeq 0.8413,$$

e con

$$P(-2\sigma \leq X \leq \sigma) = \Phi_{0,\sigma}(\sigma) - \Phi_{0,\sigma}(-2\sigma) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \simeq 0.8185,$$

$$P(-\sigma \leq Y \leq 2\sigma) = \Phi_{0,\sigma}(2\sigma) - \Phi_{0,\sigma}(-\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \simeq 0.8185.$$

Pertanto:  $p \simeq \frac{0.8185^2}{0.9772 \times 0.8413} \simeq 0.8149$ . Inoltre, osservando che  $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 0$  e quindi  $\mathbb{P}(X+Y) = \mathbb{P}(2X-2Y) = 0$ , segue

$$\begin{aligned} Cov(X+Y, 2X-2Y) &= \mathbb{P}[(X+Y)(2X-2Y)] - \mathbb{P}(X+Y)\mathbb{P}(2X-2Y) = \mathbb{P}[(X+Y)(2X-2Y)] = \\ &= \mathbb{P}(2X^2 - 2Y^2) = 2\mathbb{P}(X^2) - 2\mathbb{P}(Y^2) = 2\sigma^2 - 2\sigma^2 = 0. \end{aligned}$$

3. Indicando con  $X$  il numero aleatorio di pezzi difettosi presenti fra i tre componenti prelevati dal lotto, si ha  $X \sim H(5, 3, \frac{2}{5})$ ; allora  $P(H_r) = P(X = r)$ ,  $r = 0, 1, 2$ , con

$$P(X = 0) = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \quad P(X = 1) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10}, \quad P(X = 2) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Inoltre:  $P(E|H_0) = 1$ ,  $P(E|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ ,  $P(E|H_2) = 0$ ;

pertanto:  $P(E|H_1 \vee H_2) = \frac{P(EH_1 \vee EH_2)}{P(H_1 \vee H_2)} = \frac{P(EH_1) + P(EH_2)}{P(H_1) + P(H_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10}}{\frac{6}{10} + \frac{3}{10}} = \frac{2}{9}$ .

Infine:  $P(H_0 | E) = \frac{P(E|H_0)P(H_0)}{\sum_{r=0}^2 P(E|H_r)P(H_r)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{10}}{1 \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$ .

4. Dev'essere  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ; ovvero  $\int_{-1}^3 k(x+1)dx = k \left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^3 = 8k = 1$ ; quindi  $k = \frac{1}{8}$ .  
Inoltre, osservando che

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \int_{-1}^x \frac{t+1}{8} dt, & -1 < x < 3 \\ 1, & x \geq 3; \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{(x+1)^2}{16}, & -1 < x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases};$$

dev'essere:  $\int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx = F(x_0) = \frac{(x_0+1)^2}{16} = \frac{1}{4}$ ,  $-1 < x_0 < 3$ , da cui segue:  $x_0 = 1$ .

5. Indicando con  $X_i$  il numero di pezzi difettosi estratti da  $L_i$ ,  $i = 1, 2$ , si ha

$$X_1 \sim H(3, 2, \frac{1}{3}), \quad X_2 \sim H(6, 2, \frac{1}{6}), \quad X = X_1 + X_2 \in \{0, 1, 2\},$$

con  $X_1, X_2$  indipendenti. Quindi  $m_X = \mathbb{P}(X_1) + \mathbb{P}(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = 1$ ; inoltre

$$\sigma_X^2 = Var(X_1) + Var(X_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - \frac{2-1}{3-1}\right) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \left(1 - \frac{2-1}{6-1}\right) = \dots = \frac{9}{9},$$

$$P(X_1 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}, \quad P(X_2 = 0) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}, \quad P(X_2 = 1) = \frac{1}{3},$$

$$P(X = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(X = 2) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Pertanto, posto  $P(X = h) = p_h$ , si ottiene:  $\varphi_X(t) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} e^{it} + \frac{2}{9} e^{2it}$ .

6. Si ha:  $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{m_3, \sigma_3}$ , con  $m_3 = m_0 = 1$ , in quanto  $\bar{x} = m_0 = 1$ . Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_3^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{3}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + 3 = \frac{28}{9},$$

e quindi  $\sigma_3 = \frac{3}{2\sqrt{7}}$ ; pertanto:  $\Theta | \mathbf{x} \sim N_{1, \frac{3}{2\sqrt{7}}}$ . Allora

$$\begin{aligned} P(1-\theta_0 \leq \Theta \leq 1+\theta_0 | \mathbf{x}) &= \Phi_{1, \frac{3}{2\sqrt{7}}}(1+\theta_0) - \Phi_{1, \frac{3}{2\sqrt{7}}}(1-\theta_0) = \Phi\left(\frac{1+\theta_0-1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) - \Phi\left(\frac{1-\theta_0-1}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) - 1 = 2\Phi(2) - 1 \iff \Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{3}{2\sqrt{7}}}\right) = \Phi(2), \end{aligned}$$

da cui (essendo  $\Phi$  un funzione crescente) segue:  $\theta_0 = 2\sigma_3 = \frac{3}{\sqrt{7}}$ .

7. Si ha

$$\int_5^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy = k \int_5^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-2y} dy = \frac{k}{2} \int_5^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{k}{2} e^{-5} = 1,$$

da cui segue:  $k = 2e^5$ . Inoltre, per ogni  $x \geq 5$ , si ha

$$f_1(x) = 2e^5 \int_0^{+\infty} e^{-x-2y} dy = e^5 e^{-x} \int_0^{+\infty} 2e^{-2y} dy = e^5 e^{-x} = e^{-(x-5)},$$

con  $f_1(x) = 0$  altrove. Pertanto, per ogni  $x > 5$ ,

$$S_1(x) = \int_x^{+\infty} e^5 e^{-t} dt = e^5 e^{-x} = e^{-(x-5)} = f_1(x); \quad h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = 1.$$