Probabilità e Statistica (11/06/2011)

(Ing. Civile - Trasporti, Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un'urna, contenente 6 palline numerate da 1 a 6, Tizio e Caio effettuano ognuno 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"Tizio ottiene sempre risultato pari, oppure sempre dispari "*, $B =$ *"Caio ottiene sempre un risultato minore di 3, oppure sempre maggiore o uguale a 3"*, $C =$ *"si verifica uno e uno solo degli eventi A, B"*, calcolare le probabilità condizionate $P(A|C)$ e $P(B|C)$.

   $P(A|C) =$ $\qquad\qquad$ $P(B|C) =$

2. Dati due numeri aleatori X, Y, con coefficiente di correlazione $\rho = \frac{1}{2}$ e con distribuzione normale di parametri $m_1 = m_2 = 1$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$, calcolare la previsione μ del numero aleatorio XY e la varianza σ^2 del numero aleatorio $\frac{X+Y}{2}$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $\sigma^2 =$

3. Tizio lancia 10 volte una moneta che si suppone "non difettosa". Calcolare: (i) la probabilità che esca almeno una volta Testa (evento A); (ii) la probabilità dell'evento condizionato $A|B$, dove B è l'evento "nei 10 lanci esce sempre la stessa faccia". (*si indichi con X il numero aleatorio di volte in cui esce Testa*).

   $P(A) =$ $\qquad\qquad$ $P(A|B) =$

4. Dato il triangolo T di vertici i punti $(0,0), (1,0), (1,2)$, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x,y) = 2xy$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Determinare: (i) la previsione di Y; (ii) i valori positivi di a tali che $P(Y > aX) > P(Y \leq aX)$.

   $\mathbb{P}(Y) =$ $\qquad\qquad$ $a \in$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$ e la funzione di rischio $h_1(x)$ di X nell'intervallo $(0,1)$.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$

6. Dati 2 numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale standard, sia $Z = a(X+Y) + b$, con $a > 0$. Supposto che la funzione caratteristica di Z sia $\varphi_Z(t) = e^{it - \frac{t^2}{2}}$, calcolare le costanti a, b. (*ricordiamo che per una distribuzione normale standard si ha:* $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$).

   $a =$ $\qquad\qquad$ $b =$

7. Siano date 3 urne U_1, U_2, U_3, con U_1 contenente 2 palline bianche, U_2 contenente 1 pallina bianca e 1 nera, U_3 contenente 2 palline nere. Scelta a caso una delle 3 urne, da essa si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, ...$, ed $H_r =$ *"le estrazioni sono effettuate dall'urna U_r"*, $r = 1, 2, 3$, calcolare: (i) $P(E_3|E_5)$; (ii) $P(H_1|E_1 \cdots E_n)$.

   $P(E_3|E_5) =$ $\qquad\qquad$ $P(H_1|E_1 \cdots E_n) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/06/2010.

1. Si ha: $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$, $P(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$; inoltre, A e B sono stocasticamente indipendenti, con

$$P(C) = P(AB^c \vee A^cB) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}\,;$$

allora, osservando che $AC = A \wedge (AB^c \vee A^cB) = AB^c$, $BC = B \wedge (AB^c \vee A^cB) = A^cB$, segue

$$P(A|C) = \frac{P(AB^c)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}\,; \qquad P(B|C) = \frac{P(A^cB)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}\,.$$

2. Essendo $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}$, segue

$$Cov(X,Y) = \rho\,\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 = \mathbb{P}(XY) - m_1m_2 = \mathbb{P}(XY) - 1\,;$$

pertanto: $\mathbb{P}(XY) = 3$. Inoltre

$$\sigma^2 = Var(\frac{X+Y}{2}) = \frac{1}{4}Var(X+Y) = \frac{Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)}{4} = 3\,.$$

3. Si ha $X \sim B(10, \frac{1}{2})$; quindi

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}\,.$$

Inoltre

$$P(A|B) = P[X \geq 1 \,|\, (X = 0) \vee (X = 10)] = \frac{P(X = 10)}{P(X = 0) + P(X = 10)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{\frac{y}{2}}^{1} 2xydx = \cdots = \frac{4y - y^3}{4}\,,\ 0 \leq y \leq 2\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Quindi

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^2 yf_2(y)dy = \int_0^2 \frac{4y^2 - y^4}{4}dy = \cdots = \frac{16}{15}\,.$$

Inoltre, per ogni $0 < a < 2$, risulta

$$P(Y \leq aX) = \int_0^1 dx \int_0^{ax} 2xydy = \int_0^1 a^2x^3dx = \frac{a^2}{4}\,, \quad P(Y > aX) = 1 - \frac{a^2}{4}\,;$$

pertanto

$$P(Y > aX) > P(Y \leq aX) \iff 1 - \frac{a^2}{4} > \frac{a^2}{4} \iff 0 < a < \sqrt{2}\,.$$

5. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{2x} 2xydy = \cdots = 4x^3\,,\ 0 \leq x \leq 1\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove. Quindi, fissato $x \in (0,1)$, si ha
$$F_1(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = \int_0^x 4t^3 dt = x^4\,,$$
da cui segue, per $x \in (0,1)$,
$$S_1(x) = 1 - F_1(x) = 1 - x^4\,; \quad h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{4x^3}{1-x^4}\,.$$

6. Si ha
$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-t^2}\,;$$
quindi
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it[a(X+Y)+b]}) = \mathbb{P}(e^{iat(X+Y)}e^{itb}) = e^{itb}\varphi_{X+Y}(at) =$$
$$= e^{itb}e^{-a^2t^2} = e^{itb-a^2t^2} = e^{it-\frac{t^2}{2}} \iff a = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ b = 1\,.$$

7. Gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono scambiabili; pertanto $P(E_i) = P(E_1)$, per ogni i, e $P(E_iE_j) = P(E_1E_2)$, per ogni $i \neq j$, con $P(H_r) = \frac{1}{3}$; inoltre
$$P(E_1) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{2} + 0) = \frac{1}{2}\,,$$
$$P(E_1E_2) = \sum_r P(H_r)P(E_1E_2|H_r) = \sum_r P(H_r)P(E_1|H_r)P(E_2|H_r) = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{4} + 0) = \frac{5}{12}\,.$$
Allora
$$P(E_3|E_5) = \frac{P(E_3E_5)}{P(E_5)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}\,;$$
$$P(H_1|E_1\cdots E_n) = \frac{P(H_1)P(E_1\cdots E_n|H_1)}{\sum_r P(H_r)P(E_1\cdots E_n|H_r)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3}\cdot 0} = \frac{2^n}{2^n+1}\,.$$
Nota: $P(H_2|E_1\cdots E_n) = \frac{1}{2^n+1}\,;\ P(H_3|E_1\cdots E_n) = 0.$