Probabilità e Statistica (10/09/2011)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Da un lotto, contenente 1 pezzo buono e 1 difettoso, si effettuano tre estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ "l'i-mo pezzo estratto è difettoso", $i = 1, 2, 3$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(E_1 \vee E_2 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3)$. Posto inoltre $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$ e indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità $p = P(|X - m| > 2\sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $p =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $U = |E_1| + |E_2|$, $V = |E_2| + |E_3|$, calcolare la varianza del numero aleatorio $U - V$ e la covarianza di U, V.

   $Var(U - V) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(U, V) =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = kxy$, per $(x, y) \in Q = [2, 4] \times [2, 4]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e la mediana M del numero aleatorio X; inoltre, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $M =$ $\qquad\qquad$ *stoc. indip.*?

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{(x-5)^2}{18} - \frac{(y-3)^2}{8}}$. Calcolare la probabilità condizionata $p = P[(X \leq 8, Y \leq 5) \,|\, (5 \leq X \leq 11, 3 \leq Y \leq 7)]$ e lo scarto quadratico medio σ_Z del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio Z. (*ricordiamo che per una distribuzione normale standard si ha $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ e che un numero aleatorio X con distribuzione normale di parametri m, σ si può rappresentare come $X = \sigma X_{0,1} + m$, dove $X_{0,1}$ ha una distribuzione normale standard*)

   $\varphi_Z(t) =$

6. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = 9xe^{-3x}$, $x \geq 0$ e con $f(x) = 0$ altrove, Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$. Fissati inoltre $x > 0, x_0 > 0$, stabilire se vale $P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) = P(X > x)$.

   $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) = P(X > x)$?

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale standard. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{3}$. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = 0$, siano m_n e σ_n la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Calcolare la probabilità $p = P[(-\sigma_n \leq \Theta \leq \sigma_n)|\mathbf{x}]$ e stabilire per quali valori di n l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è minore di $\frac{1}{5}$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $n \in$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 10/09/2011.

1. Gli eventi sono stocasticamente indipendenti, con $P(E_i) = P(E_i^c) = \frac{1}{2}, i = 1, 2, 3$; allora (utilizzando le formule di De Morgan)

$$\alpha = \frac{P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_2 \vee E_3)]}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{1 - P(E_1^c)P(E_2^c)}{1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c)} = \frac{6}{7}\,.$$

Inoltre $X \in \{0, 1, 2, 3\}$, con $X \sim B(3, \frac{1}{2})$; quindi $\mathbb{P}(X) = \frac{3}{2}\,,\ \sigma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, da cui segue: $m - 2\sigma = \frac{3}{2} - \sqrt{3} < 0\,,\ \ m + 2\sigma = \frac{3}{2} + \sqrt{3} > 3$. Allora l'evento $(m - 2\sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$ è certo; quindi $p = P(|X - m| > 2\sigma) = 0$.
(*Nota: applicando la disuguaglianza di Cebicev, si avrebbe* $p \leq \frac{1}{4}$)

2. Gli eventi sono stocasticamente indipendenti, quindi $Cov(|E_i|, |E_j|) = 0\,,\ i \neq j$; inoltre $Cov(|E_i|, |E_i|) = Var(|E_i|) = \frac{1}{4}$. Allora

$$Var(U - V) = Var(|E_1| - |E_3|) = Var(|E_1|) + Var(|E_3|) - 2Cov(|E_1|, |E_3|) = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre: $Cov(U, V) = Cov(|E_1| + |E_2|, |E_2| + |E_3|) =$

$$= Cov(|E_1|, |E_2|) + Cov(|E_1|, |E_3|) + Cov(|E_2|, |E_2|) + Cov(|E_2|, |E_3|) = Var(|E_2|) = \frac{1}{4}\,.$$

3. Si ha:

$$k \int_2^4 dx \int_2^4 xydy = \cdots = k \int_2^4 (8x - 2x)dx = \cdots = 36k = 1\,;$$

pertanto: $k = \frac{1}{36}$. Inoltre

$$f_1(x) = \frac{1}{36} \int_2^4 xydy = \cdots = \frac{x}{6}\,,\ 2 \leq x \leq 4\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora

$$\int_2^M \frac{x}{6}\,dx = \frac{M^2 - 4}{12} = \frac{1}{2}\,,\ \ 2 < M < 4\,;$$

ovvero: $M^2 = 10\,,\ 2 < M < 4$, da cui segue: $M = \sqrt{10} \simeq 3.1628$. Infine

$$f_2(y) = \frac{1}{36} \int_2^4 xydx = \cdots = \frac{y}{6}\,,\ 2 \leq y \leq 4\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Osservando che $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$, segue che X e Y sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{18}}\,, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-3)^2}{8}}\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto $X \sim N_{5,3}(x), Y \sim N_{3,2}(y)$, con X, Y stocasticamente indipendenti; allora, osservando che $\Phi(0) = 0.5$, $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P[(X \le 8, Y \le 5) \,|\, (5 \le X \le 11, 3 \le Y \le 7)] = \frac{P[(X \le 8, Y \le 5) \wedge (5 \le X \le 11, 3 \le Y \le 7)]}{P(5 \le X \le 11, 3 \le Y \le 7)} =$$

$$= \frac{P(5 \le X \le 8, 3 \le Y \le 5)}{P(5 \le X \le 11, 3 \le Y \le 7)} = \frac{P(5 \le X \le 8)P(3 \le Y \le 5)}{P(5 \le X \le 11)P(3 \le Y \le 7)} =$$

$$= \frac{[\Phi_{5,3}(8) - \Phi_{5,3}(5)][\Phi_{3,2}(5) - \Phi_{3,2}(3)]}{[\Phi_{5,3}(11) - \Phi_{5,3}(5)][\Phi_{3,2}(7) - \Phi_{3,2}(3)]} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{[\Phi(2) - \Phi(0)]^2} \simeq \frac{(0.8413 - 0.5)^2}{(0.9772 - 0.5)^2} \simeq 0.5116\,.$$

Inoltre: $\sigma_Z = \sqrt{Var(X) + Var(Y)} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

5. Si ha: $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$, con $X = 3X_{0,1} + 5$, $Y = 2Y_{0,1} + 3$; pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \mathbb{P}(e^{it(3X_{0,1}+5)}) = e^{5it}\mathbb{P}(e^{i(3t)X_{0,1}}) = e^{5it}e^{-\frac{9t^2}{2}} = e^{5it-\frac{9t^2}{2}}\,;$$

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{P}(e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{it(2Y_{0,1}+3)}) = e^{3it}\mathbb{P}(e^{i(2t)Y_{0,1}}) = e^{3it}e^{-2t^2} = e^{3it-2t^2}\,;$$

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) = e^{5it-\frac{9t^2}{2}} \cdot e^{3it-2t^2} = e^{8it-\frac{13t^2}{2}}\,.$$

(*Nota:* $Z \sim N_{8,\sqrt{13}}$)

6. Per ogni $x > 0$, si ha

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} 9te^{-3t}dt = [3t(-e^{-3t})]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 3e^{-3t}dt = 3xe^{-3x} + e^{-3x} = (3x+1)e^{-3x}\,,$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{3e^{-3x} - 3(3x+1)e^{-3x}}{(3x+1)e^{-3x}} = \frac{9x}{3x+1}\,.$$

Inoltre, $P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) \neq P(X > x)$ in quanto la distribuzione non è esponenziale; infatti

$$P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{S(x + x_0)}{S(x_0)} = \frac{(3x + 3x_0 + 1)e^{-3x-3x_0}}{(3x_0 + 1)e^{-3x_0}} =$$

$$= \frac{(3x + 3x_0 + 1)e^{-3x}}{(3x_0 + 1)} = \left(1 + \frac{3x}{3x_0 + 1}\right)e^{-3x} \neq (3x+1)e^{-3x} = P(X > x)\,.$$

7. Si ha $m_0 = \bar{\mathbf{x}} = 0, \sigma_0 = 1$; quindi

$$\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}\,, \qquad m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = 0\,, \qquad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = 1 + 9n\,.$$

Allora

$p = P[(-\sigma_n \le \Theta \le \sigma_n)|\mathbf{x}] = \Phi_{0,\sigma_n}(\sigma_n) - \Phi_{0,\sigma_n}(-\sigma_n) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0.6826$;

inoltre, l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - \sigma_n, m_n + \sigma_n]$ è $2\sigma_n = \frac{2}{\sqrt{1+9n}} < \frac{1}{5}$ per $n > 11$.

Nota:

$$P[(m_n - \sigma_n \le \Theta \le m_n + \sigma_n) \,|\, \mathbf{x}] = P[(-\frac{1}{\sqrt{1+9n}} \le \Theta \le \frac{1}{\sqrt{1+9n}}) \,|\, \mathbf{x}] =$$

$$= P(-1 \le \Theta \le 1) = P(m_0 - \sigma_0 \le \Theta \le m_0 + \sigma_0) \simeq 0.6826\,.$$