Probabilità e Statistica (23/01/2012)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: il punteggio massimo si ottiene risolvendo correttamente 5 esercizi)

1. Tizio e Caio effettuano, in modo alternato, 4 estrazioni senza restituzione da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere (Tizio effettua la prima e la terza estrazione, Caio la seconda e la quarta). Vince un premio chi estrae 2 palline bianche. Posto $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3, 4$, $A =$ *"Tizio vince il premio"*, $B =$ *"Caio vince il premio"*, calcolare: $P(A)$ e $P(A \,|\, A \vee B)$.

   $P(A) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(A \,|\, A \vee B) =$

2. Sia $f(x)$ la densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 3]$, con $f(x) = \frac{x}{2}$, per $x \in [0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (1, 2]$, $f(x) = \frac{3-x}{2}$, per $x \in (2, 3]$. Calcolare la previsione m e la funzione di ripartizione $F(x)$ di X.

   $m =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) =$

3. La densità di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la probabilità p dell'evento $(Z \leq 2 + \sqrt{2} \,|\, Z \geq 2 - \sqrt{2})$. (*Si tenga presente che Z ha una distribuzione di tipo normale*)

   $p =$

4. Due numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti e con distribuzione di Poisson, di parametri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X < Y \,|\, X + Y \leq 1)$.

   $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio 1, calcolare la funzione caratteristica $\varphi(t)$ del numero aleatorio $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$.

   $\varphi(t) =$

6. Un lotto è formato da 100 pezzi, dei quali 40 prodotti da una macchina A e 60 prodotti da una macchina B. Per ciascun pezzo del lotto, il tempo di durata aleatorio X ha una distribuzione esponenziale, di parametro $\lambda_A = 1$ se il pezzo è prodotto da A, di parametro $\lambda_B = 2$ se il pezzo è prodotto da B. Preso a caso un pezzo dal lotto, calcolare la densità di probabilità $f(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$ di X, per ogni $x > 0$.

   $f(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h(x) =$

7. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3 scambiabili, con $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_1E_2) = \frac{1}{5}$, $P(E_1E_2E_3) = \frac{1}{20}$, si ponga $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_1 \vee E_3$, $C = E_2 \vee E_3$. Stabilire se le seguenti disuguaglianze sono vere o false: $P(B|A) > P(B)$, $P(C|AB) > P(C)$.

   $P(B|A) > P(B)$? $\qquad\qquad\qquad$ $P(C|AB) > P(C)$?

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Ambiente e Territorio - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 23/1/2012.

1. Si ha $P(E_i) = \frac{2}{5}$, $i = 1,2,3,4,5$; inoltre $P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, per ogni $\{i,j\} \subset \{1,2,3,4,5\}$. Pertanto

$$P(A) = P(E_1E_3) = \frac{1}{10} = P(E_2E_4) = P(B)\,.$$

Infine, osservando che $AB = \emptyset$ e che $A \wedge (A \vee B) = A$, segue

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{5}\,, \quad P(A\,|\,A \vee B) = \frac{P(A)}{P(A \vee B)} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Dalla simmetria del diagramma di $f(x)$, senza fare calcoli, si ha che la previsione di X è il punto medio di $[0,3]$, ovvero $m = \frac{3}{2}$. Inoltre, per $x < 0$ si ha $F(x) = 0$; per $x \in (0,1]$ si ha $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt = \frac{x^2}{4}$; per $x \in (1,2]$ si ha $F(x) = \int_0^1 \frac{t}{2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{2}$; per $x \in (2,3]$ si ha $F(x) = 1 - \int_x^3 \frac{3-t}{2}\,dt = \cdots = \frac{-x^2+6x-5}{4}$; infine, $F(x) = 1$ per $x > 3$.

3. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}\,dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\,, \quad \forall\, x\,,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-1)^2+(y-1)^2}{2}}\,dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}\,, \quad \forall\, y\,,$$

con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti, con distribuzione normale di parametri $m_1 = m_2 = 1, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Allora

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 2\,, \quad Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = 2\,, \quad Z \sim N_{2,\sqrt{2}}\,.$$

Quindi

$$p = P(Z \leq 2+\sqrt{2}\,|\,Z \geq 2-\sqrt{2}) = \frac{P(2-\sqrt{2} \,\leq\, Z \,\leq\, 2+\sqrt{2})}{P(Z \,\geq\, 2-\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{\Phi_{2,\sqrt{2}}(2+\sqrt{2}) - \Phi_{2,\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})}{1 - \Phi_{2,\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-1)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1)} \simeq 0.8114\,.$$

4. Si ha $P(X = h) = P(Y = h) = \frac{2^h}{h!}\,e^{-2}$, $h = 0,1,\ldots$. Allora, posto $P(X = h, Y = k) = p_{hk}$, segue $p_{hk} = \frac{2^h}{h!}\,e^{-2} \cdot \frac{2^k}{k!}\,e^{-2} = \frac{2^{h+k}}{h!k!}\,e^{-4}$. Pertanto

$$P(X+Y \leq 1) = p_{00} + p_{01} + p_{10} = e^{-4} + 4e^{-4} = 5e^{-4}\,,$$

e quindi

$$\alpha = P(X < Y \,|\, X + Y \leq 1) = \frac{P(X < Y, X + Y \leq 1)}{P(X + Y \leq 1)} = \frac{p_{01}}{p_{00} + p_{01} + p_{10}} = \frac{2e^{-4}}{5e^{-4}} = \frac{2}{5}\,.$$

5. Si ha $X \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(X = 0) = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}\,;$$

$$P(X = 1) = P(E_1 E_2^c E_3^c) + P(E_1^c E_2 E_3^c) + P(E_1^c E_2^c E_3) = 3P(E_1 E_2^c E_3^c) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5}\,,$$

$$P(X = 2) = P(E_1 E_2 E_3^c) + P(E_1 E_2^c E_3) + P(E_1^c E_2 E_3) = 3P(E_1 E_2 E_3^c) = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{10}\,.$$

Pertanto

$$\varphi(t) = \sum_{h=0}^{2} p_h \, e^{itx_h} = \frac{1 + 6e^{it} + 3e^{2it}}{10}\,.$$

6. Introdotto l'evento H = *"il pezzo estratto a caso è stato prodotto da A"*, si ha $P(H) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$; allora, ricordando che $\int_x^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda x}$, segue

$$S(x) = P(X > x) = P(X > x \,|\, H)P(H) + P(X > x \,|\, H^c)P(H^c) = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{3}{5}\, e^{-2x}\,,\; x > 0\,.$$

Pertanto

$$f(x) = -S'(x) = \frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{6}{5}\, e^{-2x}\,; \quad h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{6}{5}\, e^{-2x}}{\frac{2}{5}\, e^{-x} + \frac{3}{5}\, e^{-2x}} = \frac{2e^x + 6}{2e^x + 3} = 1 + \frac{3}{2e^x + 3}\,.$$

7. Si ha

$$AB = (E_1 \vee E_2)(E_1 \vee E_3) = \cdots = E_1 \vee E_2 E_3\,;$$

allora

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(E_1 \vee E_2 E_3)}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(E_1) + P(E_2 E_3) - P(E_1 E_2 E_3)}{P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 E_2)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{20}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}} = \frac{13}{16} \simeq 0.8125\,,$$

con $P(B) = P(A) = \frac{4}{5} = 0.8$. Pertanto: $P(B|A) > P(B)$. Inoltre

$$ABC = (E_1 \vee E_2 E_3) \wedge (E_2 \vee E_3) = \cdots = (E_1 E_2 \vee E_1 E_3 \vee E_2 E_3)\,,$$

con

$$P(ABC) = \cdots = 3P(E_1 E_2) - 2P(E_1 E_2 E_3) = 3 \cdot \frac{1}{5} - 2 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}\,.$$

Allora

$$P(C|AB) = \frac{P(ABC)}{P(AB)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{13}{20}} = \frac{10}{13} \simeq 0.7692 \,<\, P(C) = 0.8\,.$$