Probabilità e Statistica (15/02/2012)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Tre urne U, V e W contengono ciascuna 2 palline bianche e 1 nera. Tizio, Caio e Sempronio estraggono ciascuno 2 palline in blocco, rispettivamente, da U, V e W, vincendo un premio se le due palline sono bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $C =$ "Sempronio vince il premio", calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno dei tre amici vinca il premio (evento E); (ii) la probabilità α che almeno due dei tre amici vincano il premio supposto vero l'evento E.

   $p =$ $\alpha =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, determinare la funzione di ripartizione del numero aleatorio $X = |AB| - |AC| + |BC|$.

   $F(x) =$

3. Un oggetto percorre uno spazio di 4 metri partendo da fermo, con un'accelerazione aleatoria costante A (in m/sec^2), con distribuzione di probabilità uniforme nell'intervallo $(0, 2]$. Calcolare: (i) la previsione μ del tempo aleatorio T impiegato per effettuare il percorso; (ii) il valore M tale che gli eventi $(T \leq M)$ e $(T \geq M)$ sono equiprobabili.

   $\mu =$ $M =$

4. Due oggetti partono in un certo istante da uno stesso punto allontanandosi in direzioni opposte per un tempo T, il primo con velocità aleatoria X, il secondo con velocità aleatoria Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con Z la distanza tra i due oggetti al tempo T, calcolare: (i) $P(Z \leq z)$, con $z > 0$; (ii) la previsione μ di Z; (iii) lo scarto quadratico medio σ di Z. *(ricordiamo che, per ogni intero n, si ha $\Gamma(n + 1) = n!$)*

   $P(Z \leq z) =$ $\mu =$ $\sigma =$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di rischio $h_Z(z)$ di Z e la probabilità condizionata $p = P(Z > z + d \,|\, Z > z)$, con $z > 0$, $d > 0$.

   $h_Z(z) =$ $p =$

6. Un operatore prende a caso un lotto da un insieme di 5 lotti, uno dei quali contiene 3 pezzi difettosi e 1 buono, mentre gli altri 4 lotti contengono 2 pezzi difettosi e 2 buoni. Successivamente, l'operatore esamina a caso tutti i pezzi del lotto. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto dall'operatore è difettoso"*, $i = 1, 2, 3, 4$, $H =$ *"il lotto utilizzato dall'operatore contiene 3 pezzi difettosi e 1 buono"*, calcolare: (i) $P(H|E_1E_2)$; (ii) $P(E_4|E_1E_2)$.

   $P(H|E_1E_2) =$ $P(E_4|E_1E_2) =$

7. Le entrate e le uscite di un'attività economica sono rappresentate (in un'opportuna unità di misura) da due numeri aleatori X ed Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione normale, con $m_1 = 5, \sigma_1 = 1, m_2 = 1, \sigma_2 = 2$. Calcolare la funzione caratteristica del guadagno aleatorio $Z = X - Y$ e la probabilità dell'evento $(m_Z - 2\sigma_Z \leq Z \leq m_Z + 2\sigma_Z)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $p =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Ambiente e Territorio - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 15/02/2012.

1. Gli eventi A, B e C sono indipendenti ed equiprobabili, con

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{\binom{2}{2}\binom{1}{0}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}\,,\; P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{9}\,,\; P(ABC) = \frac{1}{27}\,.$$

Allora: $p = P(A \vee B \vee C) = 1 - P(A^cB^cC^c) = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{19}{27}$; inoltre, osservando che $(AB \vee AC \vee BC) \wedge (A \vee B \vee C) = AB \vee AC \vee BC$ e che $ABAC = ABBC = ACBC = ABACBC = ABC$, segue: $\alpha = P(AB \vee AC \vee BC \,|\, A \vee B \vee C) = \frac{P(AB \vee AC \vee BC)}{P(A \vee B \vee C)} = = \frac{3P(AB) - 3P(ABC) + P(ABC)}{P(A \vee B \vee C)} = \frac{3 \cdot \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{27}}{\frac{19}{27}} = \frac{7}{19}$.

2. Si ha $X \in \{-1, 0, 1\}$, con $(X = -1) = AB^cC$, $(X = 1) = ABC \vee ABC^c \vee A^cBC$, $(X = 0) = AB^cC^c \vee A^cBC^c \vee A^cB^cC \vee A^cB^cC^c$, e con
$P(X = -1) = P(AB^cC) = P(A)P(B^c)P(C) = \frac{2}{27}$,
$P(X = 0) = P(AB^cC^c) + P(A^cBC^c) + P(A^cB^cC) + P(A^cB^cC^c) = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}$,
$P(X = 1) = P(ABC) + P(ABC^c) + P(A^cBC) = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{5}{27}$.
Pertanto: $F(x) = 0$ per $x < -1$, $F(x) = \frac{2}{27}$ per $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \frac{22}{27}$ per $0 \leq x < 1$, $F(x) = 1$ per $x \geq 1$.

3. Si ha: $s = 4 = \int_0^T At\,dt = \cdots = \frac{1}{2}AT^2$; pertanto: $T = \sqrt{\frac{8}{A}} = 2\sqrt{\frac{2}{A}}$, con $T \in [2, +\infty)$. Allora: $\mathbb{P}(T) = \mu = \int_0^2 2\sqrt{\frac{2}{a}}\, f(a)da = \int_0^2 2\sqrt{\frac{2}{a}}\, \frac{1}{2}\, da = \cdots = 4$; inoltre: $P(T \leq M) = = P(T \geq M) = P\left(A \leq \frac{8}{M^2}\right) = \int_0^{\frac{8}{M^2}} \frac{1}{2} da = \frac{4}{M^2} = \frac{1}{2}$, e quindi: $M = 2\sqrt{2}$.

In alternativa: per ogni fissato $t > 2$, si ha

$$P(T \leq t) = F_T(t) = P(T^2 \leq t^2) = P\left(A \geq \frac{8}{t^2}\right) = \int_{\frac{8}{t^2}}^2 \frac{1}{2}\, dt = 1 - \frac{4}{t^2}\,,$$

da cui segue: $P(T \geq M) = P(T \leq M) = F_T(M) = 1 - \frac{4}{M^2} = \frac{1}{2}$, e quindi: $M = 2\sqrt{2}$. Inoltre, $f_T(t) = F'_T(t) = \frac{8}{t^3}$, per $t > 2$, con $f_T(t) = 0$ altrove; pertanto

$$\mu = \int_2^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_2^{+\infty} \frac{8}{t^2} dt = \left[-\frac{8}{t}\right]_2^{+\infty} = 4\,.$$

Nota: in questo esempio, come si può verificare, risulta $\mathbb{P}(T^2) = +\infty$*; pertanto* $\sigma_T = +\infty$*.*

4. La velocità con cui gli oggetti si allontanano è $X + Y$; quindi la distanza tra i due oggetti al tempo T è $Z = (X + Y)T \in [0, +\infty)$. Allora, fissato $z > 0$, si ha

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = P(X + Y \leq \frac{z}{T}) = \int_0^{\frac{z}{T}} \int_0^{\frac{z}{T} - x} e^{-x-y} dx dy = \int_0^{\frac{z}{T}} e^{-x}(1 - e^{-(\frac{z}{T} - x)}) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{z}{T}} e^{-x} dx - \int_0^{\frac{z}{T}} e^{-\frac{z}{T}} dx = 1 - e^{-\frac{z}{T}} - \frac{z}{T} e^{-\frac{z}{T}} = 1 - (1 + \frac{z}{T}) e^{-\frac{z}{T}} \,;$$

quindi: $f_Z(z) = \cdots = \frac{z}{T^2}\, e^{-\frac{z}{T}}$ per $z > 0$, con $f_Z(z) = 0$ altrove.
Pertanto, posto $u = \frac{z}{T}$, si ha

$$\mu = \mathbb{P}(Z) = \int_0^{+\infty} z f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{T^2}\, e^{-\frac{z}{T}} dz = T \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du = \Gamma(3)\, T = 2!\, T = 2T \,;$$

inoltre

$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_0^{+\infty} z^2 f_Z(z) dz = \int_0^{+\infty} \frac{z^3}{T^2}\, e^{-\frac{z}{T}} dz = T^2 \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = \Gamma(4)\, T^2 = 3!\, T^2 = 6T^2 \,,$$

da cui segue: $Var(Z) = 6T^2 - 4T^2 = 2T^2$; quindi: $\sigma = \sqrt{2}\, T$.

5. Per ogni $z > 0$ si ha: $F_Z(z) = P(Z \leq z) = 1 - (1 + \frac{z}{T}) e^{-\frac{z}{T}}$, $f_Z(z) = \frac{z}{T^2}\, e^{-\frac{z}{T}}$. Allora $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\frac{z}{T^2}\, e^{-\frac{z}{T}}}{(1+\frac{z}{T}) e^{-\frac{z}{T}}} = \frac{z}{T(T+z)}$. Infine

$$p = P(Z > z + d \,|\, Z > z) = \frac{P(Z > z + d, Z > z)}{P(Z > z)} = \frac{P(Z > z + d)}{P(Z > z)} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{z+d}{T}\right) e^{-\frac{z+d}{T}}}{\left(1 + \frac{z}{T}\right) e^{-\frac{z}{T}}} = \frac{e^{-\frac{d}{T}} (T + z + d)}{T + z} = e^{-\frac{d}{T}} \left(1 + \frac{d}{T + z}\right) ,$$

con $p \simeq e^{-\frac{d}{T}}$ per $z >> d$; *(se la distribuzione di probabilità di Z fosse esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{T}$ si avrebbe: $p = e^{-\frac{d}{T}}$).*

6. Si ha: $P(E_1 E_2 | H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$, $P(E_1 E_2 | H^c) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $P(H) = \frac{1}{5}$, $P(H^c) = \frac{4}{5}$. Allora

$$P(H | E_1 E_2) = \frac{P(E_1 E_2 | H) P(H)}{P(E_1 E_2)} = \frac{P(E_1 E_2 | H) P(H)}{P(E_1 E_2 | H) P(H) + P(E_1 E_2 | H^c) P(H^c)} = \cdots = \frac{3}{7} .$$

Inoltre, gli eventi E_i sono scambiabili, quindi: $P(E_4 | E_1 E_2) = \frac{P(E_1 E_2 E_4)}{P(E_1 E_2)} = \frac{P(E_1 E_2 E_3)}{P(E_1 E_2)}$, con $P(E_1 E_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{30}$, e con

$$P(E_1 E_2 E_3) = P(E_1 E_2 E_3 | H) P(H) + P(E_1 E_2 E_3 | H^c) P(H^c) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{20} \,;$$

pertanto: $P(E_4 | E_1 E_2) = P(E_3 | E_1 E_2) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{30}} = \frac{3}{14}$.
(*Nota:* $P(E_4 | E_1 E_2) \,<\, P(E_4) = P(E_1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{11}{20}$)

7. La funzione caratteristica di una distribuzione normale con parametri m, σ è $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$; pertanto, essendo X ed Y stocasticamente indipendenti, segue: $\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) =$

$$= \mathbb{P}(e^{it(X-Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX}) \mathbb{P}(e^{i(-t)Y}) = \varphi_X(t) \varphi_Y(-t) = e^{5it - \frac{t^2}{2}} e^{i(-t) - 2(-t)^2} = e^{4it - \frac{5t^2}{2}} \,;$$

pertanto Z ha una distribuzione normale di parametri $m_Z = 4$, $\sigma_Z = \sqrt{5}$. Allora

$$p = \Phi_{4,\sqrt{5}}(4 + 2\sqrt{5}) - \Phi_{4,\sqrt{5}}(4 - 2\sqrt{5}) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544 \,.$$