Probabilità e Statistica (16/04/2012)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati due lotti U, contenente 4 pezzi buoni, e V, contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso, da V si prendono a caso 2 pezzi che vengono inseriti in U. Successivamente da U si effettuano 3 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $H =$ *"i 2 pezzi inseriti in U sono entrambi buoni"*, $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto da U è buono"*, $i = 1, 2, 3$, e posto $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$, calcolare: (i) la previsione di X; (i) la previsione di X^2; (iii) la probabilità p dell'evento condizionato $H|(X = 3)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\mathbb{P}(X^2) =$ $p =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 2a]$ è $f(x) = a - x$, per $x \in [0, a]$, $f(x) = x - a$, per $x \in [a, 2a]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la costante a; (ii) la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $F(x) =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(1, 1), (2, 1), (1, 2)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [1, 2]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [1, 2]$; inoltre, stabilire se X e Y sono incorrelati.

   $f_1(x) =$ $f_2(y) =$ $Cov(X, Y) = 0$?

4. Un sistema S è composto da 3 dispositivi in parallelo, ognuno dei quali ha una durata aleatoria con distribuzione uniforme in $[0, 2a]$. Sia T il tempo aleatorio di durata di S. Assumendo che i tempi aleatori di durata, X_1, X_2, X_3, dei tre dispositivi siano indipendenti, calcolare: (i) la probabilità $\alpha = P(T > a)$; (ii) la previsione di T.

   $\alpha =$ $\mathbb{P}(T)$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = xe^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Posto $Z = X + Y$, calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di Z.

   $S_Z(z) =$ $h_Z(z) =$

6. La funzione caratteristica di quattro numeri aleatori $X_1, \ldots, X_4$, ugualmente distribuiti e stocasticamente indipendenti, è $\varphi(t) = e^{-2t^2}$. Indicando con Z la loro media aritmetica, calcolare la funzione caratteristica di Z e la probabilità p dell'evento condizionato $(-1 \leq Z \leq 2) \,|\, (-2 \leq Z \leq 1)$.

   $\varphi_Z(t) =$ $p =$

7. Da un'urna U, contenente 2 palline bianche e 4 nere, Tizio e poi Caio estraggono ciascuno 2 palline senza restituzione, vincendo un premio se almeno una delle due palline estratte è bianca. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che sia Tizio che Caio vincano il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio.

   $p =$ $\alpha =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civile e Trasporti - Ambiente e Territorio - Roma)

Soluzioni della prova scritta del 16/04/2012.

1. Si ha: $P(H) = \frac{\binom{1}{0}\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$, $P(H^c) = \frac{2}{3}$; inoltre: $X \in \{2,3\}$, con $P(X=2|H) = 0$, $P(X=3|H) = P(E_1E_2E_3|H) = 1$, e con

$$P(X=3|H^c) = P(E_1E_2E_3|H^c) = \frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\,,\; P(X=2|H^c) = 1 - P(X=3|H^c) = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $P(X=2) = P(X=2|H)P(H) + P(X=2|H^c)P(H^c) = 0\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, con $P(X=3) = 1 - P(X=2) = \frac{2}{3}$; allora

$$\mathbb{P}(X) = 2\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}\,, \quad \mathbb{P}(X^2) = 2^2\cdot\frac{1}{3} + 3^2\cdot\frac{2}{3} = \frac{22}{3}\,.$$

Inoltre: $P(H|X=3) = \frac{P(X=3|H)P(H)}{P(X=3)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = P(H)$.
(*gli eventi H ed $(X=3)$ sono correlati positivamente*).

2. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero

$$\int_0^a (a-x)dx + \int_a^{2a}(x-a)dx = \cdots = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = 1\,;$$

pertanto: $a = 1$. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, per $x \leq 0$ si ha: $F(x) = 0$; per $x \geq 2$ si ha: $F(x) = 1$; per $x \in (0,1)$ si ha: $F(x) = \int_0^x (1-t)dt = x - \frac{x^2}{2}$; per $x \in [1,2)$ si ha: $F(x) = \int_0^1 (1-t)dt + \int_1^x (t-1)dt = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} - x + 1$.

3. L'area di T è $\mu(T) = \frac{1}{2}$; pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = 2$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(2,1),(1,2)$ ha equazione: $x + y = 3$; allora

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_1^{3-x} 2dy = 4 - 2x\,,\; x \in [1,2]\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_1^{3-y} 2dx = 4 - 2y\,,\; y \in [1,2]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; pertanto X e Y sono ugualmente distribuiti, con

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_1^2 x(2-x)dx = \cdots = \frac{4}{3}\,,$$

$$\mathbb{P}(XY) = \int_1^2\int_1^{3-x} 2xydxdy = \int_1^2 x[y^2]_1^{3-x}dx = \int_1^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx = \frac{7}{4}\,.$$

Allora: $Cov(X,Y) = \frac{7}{4} - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{36} < 0$; pertanto X e Y sono correlati negativamente.

(nota: con ulteriori calcoli si potrebbe verificare che $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\,,\; \rho = -\frac{1}{2}$)

4. Posto $(X_i > a) = E_i$, si ha $P(E_i) = \frac{1}{2} = P(E_i^c) = P(X_i \leq a), i = 1, 2, 3$; allora

$$\alpha = P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\,.$$

Inoltre, fissato $t \in [0, 2a]$ e indicando con A_i l'evento $(X_i \leq t)$, si ha $P(A_i) = \frac{t}{2a}$, $i = 1, 2, 3$; allora

$$P(T \leq t) = F_T(t) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \left(\frac{t}{2a}\right)^3, \quad f_T(t) = F_T'(t) = \frac{3t^2}{8a^3}\,.$$

Pertanto: $\mathbb{P}(T) = \int_0^{2a} t f_T(t) dt = \int_0^{2a} \frac{3t^3}{8a^3} dt = \left[\frac{3t^4}{32a^3}\right]_0^{2a} = \frac{3}{2}\,a.$

5. Per ogni $z > 0$ si ha

$$P(Z \leq z) = F_Z(z) = P(X+Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} x e^{-x-y} dy = \int_0^z dx (x e^{-x} \int_0^{z-x} e^{-y} dy) =$$

$$= \int_0^z x e^{-x}(1 - e^{-(z-x)}) dx = \int_0^z x e^{-x} dx - \int_0^z x e^{-x} e^{-z+x} dx = [-x e^{-x}]_0^z + \int_0^z e^{-x} dx - \frac{z^2}{2} e^{-z} =$$

$$= -z e^{-z} + (1 - e^{-z}) - \frac{z^2}{2} e^{-z} = 1 - e^{-z}(1 + z + \frac{z^2}{2})\,.$$

Pertanto: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = e^{-z}(1 + z + \frac{z^2}{2})\,,\ z > 0$; inoltre
$f_Z(z) = F_Z'(z) = -S_Z'(z) = -e^{-z}(1 + z + \frac{z^2}{2}) + e^{-z}(1 + z) = \frac{z^2}{2} e^{-z}\,,\ z > 0.$
Allora: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\frac{z^2}{2}}{1+z+\frac{z^2}{2}} = \frac{z^2}{2+2z+z^2}\,,\ z > 0\,.$

6. Essendo $X_1, \ldots, X_4$ stocasticamente indipendenti, posto $Y = X_1 + \cdots + X_4$, si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_4}(t) = e^{-8t^2}\,,$$

ed essendo $Z = \frac{Y}{4}$ segue

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{4}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{4}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{4}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\,;$$

pertanto Z ha una distribuzione normale standard. Allora

$$p = P[(-1 \leq Z \leq 2)\,|\,(-2 \leq Z \leq 1)] = \frac{P(-1 \leq Z \leq 2,\, -2 \leq Z \leq 1)}{P(-2 \leq Z \leq 1)} =$$

$$= \frac{P(-1 \leq Z \leq 1)}{P((-2 \leq Z \leq 1)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1) + \Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.6826}{0.8413 + 0.9772 - 1} \simeq 0.834\,.$$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono scambiabili con $P(E_i) = \frac{1}{3}$ e con $P(E_i E_j) = P(E_1 E_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$. Inoltre, si ha $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_3 \vee E_4$ ed essendo gli eventi $E_1E_3, E_1E_4, E_2E_3, E_2E_4$ a due a due incompatibili segue

$$p = P(AB) = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4)] = P(E_1E_3 \vee E_1E_4 \vee E_2E_3 \vee E_2E_4) =$$

$$= P(E_1E_3) + P(E_1E_4) + P(E_2E_3) + P(E_2E_4) = 4 \cdot \frac{1}{15} = \frac{4}{15}\,.$$

Infine, $P(A) = P(B) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{3}{5}$; pertanto

$$\alpha = P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{15} = \frac{14}{15}\,.$$