Probabilità e Statistica (7/09/2012)

(Ing. Civile - Trasporti - Amb. Terr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati due numeri aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con uguale distribuzione geometrica di parametro $p \in (0,1)$, sia $U = X + \sqrt{2}Y, V = \sqrt{2}X - Y$. Calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(X + Y > 2 \,|\, X + Y < 4)$ e la covarianza di U, V.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Cov(U, V) =$

2. Un autoveicolo percorre in andata e ritorno un tratto di strada, impiegando un tempo aleatorio (in ore) $X + 1$ in andata e $Y + 1$ nel ritorno. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = k(x+y)$, per $(x, y) \in Q = [0, 1] \times [0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k; inoltre, indicando con Z il tempo aleatorio totale di percorrenza, calcolare la previsione m di Z e la probabilità p dell'evento $(Z > z + 2)$, con $0 < z < 1$.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione F_1 di X e il valore x_0 tale che gli eventi $(X > x_0)$ e $(X \leq x_0)$ sono equiprobabili.

   $F_1(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $x_0 =$

4. Dati 3 eventi A, B, C, indipendenti ed equiprobabili di probabilità p, con $0 < p < 1$, sia $X = |A| + |B|$ e $Y = |B| + |C|$. Determinare: (i) il valore di p tale che la covarianza di X e Y sia massima; (ii) il coefficiente di correlazione ρ di X, Y.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\rho =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-5)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{2}}$. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$ e la probabilità p dell'evento condizionato $(Z \leq 2 + 2\sqrt{2}) \,|\, (Z \geq 2 - \sqrt{2})$.
   (*ricordiamo che per una distribuzione normale* $N_{m,\sigma}$ *si ha* $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$).

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

6. Un sistema S è costituito da tre dispositivi d_1, d_2, d_3 messi in funzione nello stesso istante; i primi due dispositivi, in serie fra di loro, formano un modulo M disposto in parallelo con d_3. I tempi aleatori di durata dei tre dispositivi, X_1, X_2, X_3, sono indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Calcolare, per il tempo aleatorio T di durata di S, la previsione μ e la funzione di rischio $h_T(t)$.
   (*si indichi con* Y *il tempo aleatorio di durata del modulo* M)

   $\mu =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_T(t) =$

7. Da un lotto, contenente 4 pezzi buoni e 2 difettosi, si effettuano 6 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ "l'i-mo pezzo estratto è difettoso", $i = 1, \ldots, 6$, calcolare la probabilità condizionata $\alpha = P(E_3 \vee E_4 \,|\, E_3 \vee \cdots \vee E_6)$. Posto inoltre $X = |E_3| + \cdots + |E_6|$ e indicando con m e σ la previsione e lo scarto quadratico medio di X, calcolare la probabilità $p = P(|X - m| < \sigma)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Ambiente e Territorio, Roma)
Soluzioni della prova scritta del 7/09/2012.

1. Si ha $X \in \{1,2,\ldots\}, Y \in \{1,2,\ldots\}, X+Y \in \{2,3,\ldots\}$, con $P(X=h)=P(Y=h)=pq^{h-1}, P(X=h,Y=k)=P(X=h)P(Y=k)=p^2q^{h+k-2}, h=1,2,\ldots,k=1,2,\ldots$; allora
$$\alpha = \frac{P(X+Y>2, X+Y<4)}{P(X+Y<4)} = \frac{P(X+Y=3)}{P(X+Y=2)+P(X+Y=3)} =$$
$$= \frac{P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}{P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)} = \frac{p^2q+p^2q}{p^2+p^2q+p^2q} = \frac{2q}{1+2q} = \frac{2-2p}{3-2p}\,.$$
Inoltre, osservando che $Var(X)=Var(Y)$, $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=0$, segue
$$Cov(U,V)=Cov(X+\sqrt{2}Y, \sqrt{2}X-Y)=\sqrt{2}Cov(X,X)-Cov(X,Y)+2Cov(Y,X)-\sqrt{2}Cov(Y,Y)=$$
$$=\sqrt{2}[Var(X)-Var(Y)]=0\,.$$
In alternativa: $\mathbb{P}(X)=\mathbb{P}(Y), \mathbb{P}(X^2)=\mathbb{P}(Y^2)$, $Cov(U,V)=\mathbb{P}(UV)-\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)$, con $\mathbb{P}(UV)=\mathbb{P}(\sqrt{2}X^2-XY+2XY-\sqrt{2}Y^2)=\mathbb{P}(XY)$; $\mathbb{P}(U)=\mathbb{P}(X)+\sqrt{2}\mathbb{P}(Y)$, $\mathbb{P}(V)=\sqrt{2}\mathbb{P}(X)-\mathbb{P}(Y)$; $\mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V)=\sqrt{2}[\mathbb{P}(X)]^2-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)+2\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)-\sqrt{2}[\mathbb{P}(Y)]^2=\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)$; pertanto: $Cov(U,V)=\mathbb{P}(XY)-\mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y)=Cov(X,Y)=0$.

2. Si ha
$$\int_0^1\int_0^1 k(x+y)dxdy=\cdots=k(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=1\,;$$
pertanto: $k=1$. Inoltre $m=\mathbb{P}(Z)=\mathbb{P}(X+Y+2)=\mathbb{P}(X+Y)+2$, con
$$\mathbb{P}(X+Y)=\int_0^1\int_0^1(x+y)^2dxdy=\cdots=\int_0^1[x^2y+xy^2+\frac{y^3}{3}]_0^1dx=\cdots=\frac{7}{6}\,;$$
pertanto: $m=2+\frac{7}{6}=\frac{19}{6}$. Infine $p=P(Z>z+2)=1-P(Z\le z+2)=1-P(X+Y\le z)=$
$$=1-\int_0^z dx\int_0^{z-x}(x+y)dy=\cdots=1-\int_0^z\frac{1}{2}(z^2-x^2)dx=1-\frac{z^3}{3}\,.$$

3. Si ha $X\in[0,1]$; quindi $P(X\le x)=F_1(x)=0$ per ogni $x\le 0$; $P(X\le x)=F_1(x)=1$ per ogni $x\ge 1$; inoltre, per $x\in(0,1)$ si ha
$$P(X\le x)=F_1(x)=P(X\le x, 0\le Y\le 1)=\int_0^x\int_0^1(u+y)dudy=$$
$$\int_0^x[uy+\frac{y^2}{2}]_0^1du=\int_0^x(u+\frac{1}{2})du=[\frac{u^2}{2}+\frac{u}{2}]_0^x=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\,.$$
Allora, osservando che $P(X>x_0)=1-P(X\le x_0)$, dev'essere $P(X\le x_0)=F_1(x_0)=\frac{1}{2}$; quindi: $x_0\in(0,1)$, con $\frac{x_0^2}{2}+\frac{x_0}{2}=\frac{1}{2}$, da cui segue: $x_0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4. Si ha $\mathbb{P}(X) = P(A) + P(B) = 2p$, $\mathbb{P}(Y) = P(B) + P(C) = 2p$; inoltre
$$XY = (|A|+|B|)(|B|+|C|) = |A||B|+|A||C|+|B||B|+|B||C| = |AB|+|AC|+|B|+|BC|\,,$$
con $\mathbb{P}(XY) = p+3p^2$; pertanto $Cov(X,Y) = p+3p^2-4p^2 = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$, corrispondente a $p = \frac{1}{2}$. Inoltre $Var(X) = Var(Y) = 2p(1-p)$; allora $\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{p(1-p)}{2p(1-p)} = \frac{1}{2}$, $\forall p \in (0,1)$.

5. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}\,,\ f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+3)^2}{2}}\,,$$
con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$. Pertanto $X \sim N_{5,1}(x), Y \sim N_{-3,1}(y)$, con X,Y stocasticamente indipendenti, con $\varphi_X(t) = e^{5it-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y(t) = e^{-3it-\frac{t^2}{2}}$, e con
$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{2it-t^2}\,.$$
Quindi Z ha una distribuzione normale con parametri $m = 2, \sigma = \sqrt{2}$. Allora, osservando che $\Phi(1) \simeq 0.8413$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue
$$p = P[(Z \leq 2+2\sqrt{2}) \,|\, (Z \geq 2-\sqrt{2})] = \frac{P[(2-\sqrt{2} \leq Z \leq 2+2\sqrt{2})]}{P(Z \geq 2-\sqrt{2})} =$$
$$= \frac{\Phi_{2,\sqrt{2}}(2+2\sqrt{2}) - \Phi_{2,\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})}{1-\Phi_{2,\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})} = \frac{\Phi(2)-1+\Phi(1)}{\Phi(1)} \simeq \frac{0.9772-1+0.8413}{0.8413} \simeq 0.9729\,.$$

6. Si ha $Y = min\ \{X_1, X_2\}$; quindi $(Y > y) = (X_1 > y, X_2 > y)$. Allora, per ogni fissato $y > 0$, si ha: $P(Y > y) = P(X_1 > y, X_2 > y) = P(X_1 > y)P(X_2 > y) = e^{-y}e^{-y} = e^{-2y}$; ovvero, Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Inoltre $T = max\ \{Y, X_3\}$; quindi $(T \leq t) = (Y \leq t, X_3 \leq t)$. Allora, per ogni fissato $t > 0$, si ha
$$P(T \leq t) = P(Y \leq t, X_3 \leq t) = P(Y \leq t)P(X_3 \leq t) = (1-e^{-2t})(1-e^{-t}) = 1-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}\,;$$
pertanto, per ogni $t > 0$, si ha
$$P(T > t) = S_T(t) = e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}\,,\quad f_T(t) = -S_T'(t) = e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t}\,.$$
Quindi: $\mu = \int_0^{+\infty} t(e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t})dt = \cdots = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = \frac{7}{6}$.
Infine: $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t}}{e^{-t}+e^{-2t}-e^{-3t}} = \frac{e^{2t}+2e^{t}-3}{e^{2t}+e^{t}-1}$.

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono scambiabili; in particolare sono equiprobabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{3}$; inoltre $P(E_3^cE_4^c) = P(E_1^cE_2^c)$, $P(E_3^cE_4^cE_5^cE_6^c) = P(E_1^cE_2^cE_3^cE_4^c)$. Allora (sfruttando le formule di De Morgan), segue
$$\alpha = \frac{P[(E_3 \vee E_4) \wedge (E_3 \vee \cdots \vee E_6)]}{P(E_3 \vee \cdots \vee E_6)} = \frac{P(E_3 \vee E_4)}{P(E_3 \vee \cdots \vee E_6)} = \frac{1-P(E_3^cE_4^c)}{1-P(E_3^cE_4^cE_5^cE_6^c)} =$$
$$= \frac{1-P(E_1^cE_2^c)}{1-P(E_1^cE_2^cE_3^cE_4^c)} = \frac{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{9}{14}\,.$$
Inoltre $X \in \{0,1,2\}$, con $X \sim H(6,4,\frac{1}{3})$; quindi $\mathbb{P}(X) = \frac{4}{3}$, $\sigma = \frac{4}{3\sqrt{5}}$, da cui segue: $m-\sigma = \frac{4}{3} - \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}-4}{3\sqrt{5}} \in (0,1)$, $m+\sigma = \frac{4}{3} + \frac{4}{3\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}+4}{3\sqrt{5}} \in (1,2)$. Allora l'evento $(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma)$ coincide con l'evento $(X = 1)$; quindi
$$p = P(|X-m| < \sigma) = P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{3}}{\binom{6}{4}} = \frac{8}{15}\,.$$