Probabilità e Statistica (16/01/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un lotto, contenente 6 pezzi buoni e 3 guasti, si prelevano a caso 3 pezzi che vengono utilizzati in un sistema in parallelo. Indicando con X il numero aleatorio di componenti guasti fra i 3 del sistema, calcolare: (i) la probabilità a che il sistema funzioni; (ii) la probabilità b che il sistema non funzioni, supposto che almeno uno dei suoi 3 componenti sia guasto.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $b =$

2. La distribuzione di probabilità di un vettore aleatorio (X, Y) è uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (0, 2)$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la funzione di ripartizione F_Z di Z e la covarianza di Z, U, dove $U = X - Y$.

   $F_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(Z, U) =$

3. Dati due numeri aleatori continui X e Z, con $X \sim N_{m,\sigma}$ e $Z \sim N = N_{0,1}$, stabilire se, fissato $k > 0$ e posto $\alpha = P(X \leq m + k\sigma \,|\, X \leq m + 2k\sigma)$, $\beta = P(Z \leq k \,|\, Z \leq 2k)$, vale l'uguaglianza $\alpha = \beta$. Inoltre, posto $m = \frac{3}{2}, \sigma = \frac{1}{2}, Y = 2X - 3$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(-1 \leq Y \leq 1 \,|\, -2 \leq Y \leq 2)$.

   $\alpha = \beta$? $\qquad\qquad$ $p =$

4. Da un'urna contenente pN palline bianche e qN palline nere, con $0 < p < 1, q = 1 - p$ ed N pari, si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \ldots$, calcolare: (i) la probabilità $\alpha = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4)]$ in funzione di p; (ii) il valore di p tale che $P[(E_1 \vee E_2) \,|\, (E_3 \vee E_4)] = \frac{3}{4}$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $p =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$ per $x \geq 0, 0 \leq y \leq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e le funzioni di rischio $h_1(x)$ e $h_2(y)$ di X e Y, per $x > 0$ e $y > 0$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

6. Indicando con $\varphi_X(t)$ la funzione caratteristica di un numero aleatorio X e assumendo che $\varphi'_X(0) = i$, $\varphi''_X(0) = -\frac{3}{2}$, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ di X verificando che tali valori sono gli stessi nel caso di una distribuzione ipergeometrica $H(N, n, p)$, con $N = 9, n = 3, p = \frac{1}{3}$.

   $m =$ $\qquad\qquad$ $\sigma =$

7. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di un parametro aleatorio Θ, hanno una distribuzione di Poisson di parametro θ. La distribuzione iniziale di Θ è esponenziale di parametro $\lambda_0 = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = t$, calcolare la previsione μ e lo scarto quadratico medio τ di $\Theta \,|\, \mathbf{x}$.

   $\mu =$ $\qquad\qquad$ $\tau =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 16/01/2013.

1. Si ha $X \sim H(9, 3, \frac{1}{3})$, con $P(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{9}{3}}$; quindi $P(X = 0) = \frac{5}{21}$, $P(X = 3) = \frac{1}{84}$.
   Pertanto: $a = P(X < 3) = 1 - P(X = 3) = 1 - \frac{\binom{3}{3}\binom{6}{0}}{\binom{9}{3}} = \frac{83}{84}$; inoltre
$$b = P(X = 3 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(X = 3, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 3)}{1 - P(X = 0)} = \frac{1}{64}\,.$$

2. L'area del triangolo T è pari a 2; quindi $f(x, y) = \frac{1}{2}$ per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, $Z \in [0, 2]$; allora $F_Z(z) = 0$ per $z \leq 0$; $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 2$. Per $z \in (0, 2)$, si ha $F_Z(z) = P(X + Y \leq z) = P[(X, Y) \in T_z]$, dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (z, 0), (0, z)$ la cui area $\mu(T_z)$ è pari a $\frac{z^2}{2}$. Pertanto
$$F_Z(z) = \int\int_{T_z} f(x, y)dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\mu(T_z) = \frac{\mu(T_z)}{\mu(T)} = \frac{z^2}{4}\,.$$
   Inoltre, osservando che $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$, segue
$$Cov(Z, U) = Cov(X + Y, X - Y) = \cdots = Var(X) - Var(Y)\,,$$
   con
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{x}{2}\,dy = \int_0^z \frac{x(z - x)}{2}dx = \int_0^z \frac{y(z - y)}{2}dy = \int_0^z dy \int_0^{z-y} \frac{y}{2}\,dx = \mathbb{P}(Y)\,;$$
$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{x^2}{2}\,dy = \cdots = \int_0^z dy \int_0^{z-y} \frac{y^2}{2}\,dx = \mathbb{P}(Y^2)\,.$$
   Pertanto: $Var(X) = Var(Y)$, da cui segue $Cov(Z, U) = 0$.

   (*Nota: come si potrebbe verificare, le distribuzioni marginali di X e Y coincidono.*)

3. Ricordiamo che tra le funzioni di ripartizione di X e Z, $\Phi_{m,\sigma}$ e Φ, sussiste la relazione $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$; inoltre $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$; allora
$$\alpha = P(X \leq m+k\sigma \,|\, X \leq m+2k\sigma) = \frac{P(X \leq m + k\sigma, X \leq m + 2k\sigma)}{P(X \leq m + 2k\sigma)} = \frac{P(X \leq m + k\sigma)}{P(X \leq m + 2k\sigma)} =$$
$$= \frac{\Phi_{m,\sigma}(m + k\sigma)}{\Phi_{m,\sigma}(m + 2k\sigma)} = \frac{\Phi(k)}{\Phi(2k)} = \frac{P(Z \leq k)}{P(Z \leq 2k)} = \frac{P(Z \leq k, Z \leq 2k)}{P(Z \leq 2k)} = P(Z \leq k \,|\, Z \leq 2k) = \beta\,.$$
   Inoltre, $Y \sim N_{m_Y,\sigma_Y}$, con $m_Y = 2m - 3 = 0, \sigma_Y = 2\sigma = 1$; ovvero $Y \sim N$. Allora
$$p = P(-1 \leq Y \leq 1 \,|\, -2 \leq Y \leq 2) = \frac{P(-1 \leq Y \leq 1, -2 \leq Y \leq 2)}{P(-2 \leq Y \leq 2)} = \frac{P(-1 \leq Y \leq 1)}{P(-2 \leq Y \leq 2)} =$$
$$= \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{2\Phi(2) - 1} \simeq \frac{2 \times 0.8413 - 1}{2 \times 0.9772 - 1} = \frac{0.6826}{0.9544} \simeq 0.7152\,.$$

4. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = p, P(E_iE_j) = p^2$; allora anche $(E_1 \vee E_2)$ ed $(E_3 \vee E_4)$ sono indipendenti ed equiprobabili e si ha: $\alpha = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4)] = P(E_1 \vee E_2)P(E_3 \vee E_4) = (2p - p^2)^2$. Inoltre
$$P[(E_1 \vee E_2) \,|\, (E_3 \vee E_4)] = P(E_1 \vee E_2) = 2p - p^2 = 1 - q^2 = \frac{3}{4} \iff q^2 = \frac{1}{4} \iff p = \frac{1}{2}\,.$$
In modo più esplicito: posto $E_1E_2 = A,\ E_1E_3 = B,\ E_2E_3 = C,\ E_2E_4 = D$, *si ha*
$$P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4)] = \cdots = P(A \vee B \vee C \vee D) =$$
$$= P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)+$$
$$+P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD) - P(ABCD) =$$
$$= p^2 + p^2 + p^2 + p^2 - p^3 - p^3 - p^4 - p^4 - p^3 - p^3 + p^4 + p^4 + p^4 + p^4 - p^4 =$$
$$= 4p^2 - 4p^3 + p^4 = (2p - p^2)^2 = P(E_1 \vee E_2)P(E_3 \vee E_4)\,;$$
$$P[(E_1 \vee E_2) \,|\, (E_3 \vee E_4)] = \frac{P(E_1 \vee E_2)P(E_3 \vee E_4)}{P(E_3 \vee E_4)} = P(E_1 \vee E_2) = 2p - p^2 = \frac{3}{4} \iff p = \frac{1}{2}\,.$$

5. Dalla condizione $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1$, osservando che $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1, \forall\, \lambda > 0$, segue
$$a\int_0^{+\infty} dx \int_0^x e^{-x-y}dy = a\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-x})dx = \cdots = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} = 1\,;$$
pertanto: $a = 2$. Inoltre
$$f_1(x) = \int_0^x 2e^{-x-y}dy = 2e^{-x} - 2e^{-2x}\,,\ x \geq 0\,,\ f_2(y) = \int_y^{+\infty} 2e^{-x-y}dx = 2e^{-2y}\,,\ y \geq 0\,,$$
con $f_1(x) = 0$ per $x < 0$ ed $f_2(y) = 0$ per $y < 0$. Allora, per ogni $x > 0$ e $y > 0$, si ha
$$S_1(x) = \int_x^{+\infty} (2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = \cdots = 2e^{-x} - e^{-2x}\,,\ S_2(y) = \int_y^{+\infty} 2e^{-2t}dt = \cdots = e^{-2y}\,;$$
pertanto: $h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{2e^{-x}-2e^{-2x}}{2e^{-x}-e^{-2x}} = \frac{2e^x-2}{2e^x-1} = 1 - \frac{1}{2e^x-1}\,,\quad h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{2e^{-2y}}{e^{-2y}} = 2.$

6. Si ha $\mathbb{P}(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$, segue: $m = \mathbb{P}(X) = \frac{\varphi'_X(0)}{i} = 1$; inoltre $\mathbb{P}(X^2) = \frac{\varphi''_X(0)}{i^2} = \frac{3}{2}$; allora
$$\sigma^2 = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = -\varphi''_X(0) + [\varphi'_X(0)]^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\,,\ \sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$
Per una distribuzione ipergeometrica $H(N, n, p)$, con $N = 9, n = 3, p = \frac{1}{3}$, si ottengono gli stessi valori; infatti: $m = np = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1\,;\quad \sigma = \sqrt{npq(1 - \frac{n-1}{N-1})} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{8})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim \beta(\theta \,|\, \mathbf{x})$, con
$$\beta(\theta \,|\, \mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)f(x_1 \,|\, \theta) \cdots f(x_n \,|\, \theta) = k(\mathbf{x})e^{-\theta}\frac{\theta^{x_1}}{x_1!}e^{-\theta} \cdots \frac{\theta^{x_n}}{x_n!}e^{-\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^{\sum_i x_i}e^{-(n+1)\theta} =$$
$$= k_1(\mathbf{x})\theta^t e^{-(n+1)\theta} = G_{c_n,\lambda_n}(\theta)\,,\ \ c_n = t+1\,,\ \lambda_n = n+1\,,\ k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_n^{c_n}}{\Gamma(c_n)} = \frac{(n+1)^{t+1}}{\Gamma(t+1)}\,;$$
ovvero $\Theta \mid \mathbf{x}$ ha una distribuzione Gamma di parametri $t+1, n+1$; pertanto
$$\mu = \frac{c_n}{\lambda_n} = \frac{t+1}{n+1}\,,\ \ \tau^2 = \frac{c_n}{\lambda_n^2} = \frac{t+1}{(n+1)^2}\,,\ \ \tau = \frac{\sqrt{t+1}}{n+1}\,.$$