Probabilità e Statistica (11/7/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Tizio e Caio lanciano ognuno per 3 volte un dado. Siano definiti gli eventi $A_i =$ *"nell'i-mo lancio Tizio ottiene 1"*, $i = 1, 2, 3$; $B_j =$ *"nel j-mo lancio Caio ottiene 1 oppure 2"*, $j = 1, 2, 3$; $H =$ *"Tizio ottiene sempre 1 oppure mai 1"*; $K =$ *"Caio ottiene sempre un risultato maggiore di 2 oppure mai maggiore di 2"*. Calcolare $\alpha = P(H|H \vee K)$, $\beta = P(K|H \vee K)$ e $\gamma = P(HK|H \vee K)$.

   $\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

2. Dato un numero aleatorio Z con distribuzione normale standard e posto $X = 2Z + 1, Y = -3Z+2$, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}, $Var(X-Y)$ e $p = P(X \leq 3|X \geq -3)$.

   $\rho_{XY} =$ $Var(X-Y) =$ $p =$

3. Da un'urna U contenente 2 palline bianche e 2 nere si tolgono a caso due palline che vengono inserite in un'urna vuota V. Sia X il numero aleatorio di palline bianche rimaste in U; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline bianche inserite in V. Calcolare, per ogni possibile valore (x, y) del vettore aleatorio (X, Y), la probabilità $p_{xy} = P(X = x, Y = y)$. Inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   (x, y) :
   p_{xy} : $\rho_{XY} =$

4. Due veicoli, a partire da un certo istante, si mettono in movimento nello stesso verso, con velocità aleatorie (in km/h) X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la costante a; (ii) la probabilità p che la distanza aleatoria Z tra i due veicoli dopo un'ora sia maggiore di 1 km.

   $a =$ $p =$

5. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = \frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove, sia $Y = \frac{X^2}{4}$. Calcolare la previsione di X e la funzione di rischio di Y.

   $\mathbb{P}(X) =$ $h_Y(y) =$

6. Un'apparecchiatura A produce pezzi apparentemente identici, ognuno dei quali (indipendentemente dagli altri) è difettoso con probabilità $\frac{1}{4}$. Un operatore utilizza ripetutamente a caso uno fra due pezzi prodotti da A. Siano definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei due pezzi sono difettosi"*, $r = 0, 1, 2$; $E_i =$ *"il pezzo scelto a caso l'i-ma volta è non difettoso"*, $i = 1, 2, \ldots$. Fissati due interi i, j, con $i \neq j$, calcolare $P(E_i)$ e $P(E_j|E_i)$.

   $P(E_i) =$ $P(E_j|E_i) =$

7. Un operatore preleva a caso 2 pezzi da un lotto L di 5 pezzi, dei quali 3 sono buoni e 2 difettosi. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra quelli prelevati dall'operatore, calcolare la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica di X.

   $F(x) =$ $\varphi(t) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 11/7/2013.

1. Si ha $P(A_i) = \frac{1}{6}, i = 1,2,3,$ $P(B_j) = \frac{1}{3}, j = 1,2,3;$ inoltre

$$P(H) = P(A_1A_2A_3) + P(A_1^cA_2^cA_3^c) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{7}{12}\,,$$

$$P(K) = P(B_1B_2B_3) + P(B_1^cB_2^cB_3^c) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\,.$$

Allora

$$\alpha = \frac{P(H)}{P(H)+P(K)-P(H)P(K)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{21}{26}\,,$$

$$\beta = \frac{P(K)}{P(H)+P(K)-P(H)P(K)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{6}{13}\,,$$

$$\gamma = \frac{P(HK)}{P(H)+P(K)-P(H)P(K)} = \frac{\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{1}{3}} = \frac{7}{26}\,.$$

2. Si ha $Cov(X,Y) = Cov(2Z+1, -3Z+2) = -6Cov(Z,Z) = -6Var(Z) = -6$, $\sigma_X = 2, \sigma_Y = 3$; pertanto: $\rho_{XY} = \frac{-6}{6} = -1$. Inoltre $Var(X-Y) = Var(5Z-1) = 25Var(Z) = 25$. Infine

$$p = P(X \le 3 | X \ge -3) = \frac{P(-3 \le X \le 3)}{P(X \ge -3)} = \frac{P(-2 \le Z \le 1)}{P(Z \ge -2)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-2)}{1-\Phi(-2)} =$$

$$= \frac{\Phi(1)+\Phi(2)-1}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.8413+0.9772-1}{0.9772} \simeq 0.8376\,.$$

3. Si ha $(X,Y) \in \{(2,0),(1,1),(0,2)\}$, con

$$p_{20} = P(Y=0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = P(Y=2) = p_{02}\,,\ \ p_{11} = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre, osservando che $X+Y=2$, ovvero $Y = -X+2$, segue: $\rho_{XY} = -1$.
In alternativa: $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 1$, $\mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = \frac{4}{3}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{3}$; inoltre $XY \in \{0,1\}$, con $\mathbb{P}(XY) = P(XY=1) = P(Y=1) = \frac{2}{3}$. Pertanto: $\rho_{XY} = \frac{\frac{2}{3}-1}{\frac{1}{3}} = -1$.

4. Si ha

$$a\int_0^{+\infty}dx\int_{2x}^{+\infty}e^{-x-y}dy = a\int_0^{+\infty}e^{-x}[-e^{-y}]_{2x}^{+\infty}dx = \frac{a}{3}\int_0^{+\infty}3e^{-3x}dx = \frac{a}{3} = 1\,;$$

pertanto: $a = 3$. Inoltre, la distanza aleatoria tra i due veicoli all'istante t è $Yt - Xt$; quindi $Z = Y - X$. Allora, osservando che le rette di equazione $y = 2x$ e $y = x + 1$ si intersecano nel punto $(1, 2)$, si ha $(Z \le 1)$ se e solo se (X, Y) appartiene al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (1, 2), (0, 1)$. Pertanto

$$P(Z \le 1) = P(Y \le X{+}1) = \int\int_T f(x,y)dxdy = 3\int_0^1 dx\int_{2x}^{x+1}e^{-x-y}dy = 3\int_0^1 e^{-x}[-e^{-y}]_{2x}^{x+1}dx =$$

$$= 3\int_0^1 e^{-x}(e^{-2x} - e^{-x-1})dx = \int_0^1 3e^{-3x}dx - \frac{3e^{-1}}{2}\int_0^1 2e^{-2x}dx = \cdots = 1 - \frac{3e^{-1}}{2} + \frac{e^{-3}}{2}\,,$$

da cui segue: $p = P(Z > 1) = 1 - (1 - \frac{3e^{-1}}{2} + \frac{e^{-3}}{2}) = \frac{3e^{-1} - e^{-3}}{2} \simeq 0.5269$.

5. Osserviamo che, se $Z \sim N_{0,\sqrt{2}}$, allora $\mathbb{P}(Z) = 0$, $Var(Z) = 2 = \mathbb{P}(Z^2)$; inoltre

$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{4}}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{z^2}{2}e^{-\frac{z^2}{4}}dz = 2\,;$$

pertanto: $\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty}\frac{x^2}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx = \sqrt{\pi}$. Inoltre, per ogni fissato $y \ge 0$, si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(X > 2\sqrt{y}) = \int_{2\sqrt{y}}^{+\infty}\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}dx = [-e^{-\frac{x^2}{4}}]_{2\sqrt{y}}^{+\infty} = e^{-y}\,;$$

ovvero Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Pertanto: $h_Y(y) = 1$ per $y \ge 0$, con $h_Y(y) = 0$ altrove.

6. Si ha $P(H_0) = \frac{9}{16}, P(H_1) = \frac{6}{16}, P(H_2) = \frac{1}{16}$; inoltre, gli eventi $E_1, E_2, \ldots$ sono scambiabili; pertanto, si ha: $P(E_i) = P(E_1) = P(E_1|H_0)P(H_0) + P(E_1|H_1)P(H_1) + P(E_1|H_2)P(H_2) = = 1\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{16} + 0\cdot\frac{1}{16} = \frac{3}{4}$; $P(E_j|E_i) = \frac{P(E_jE_i)}{P(E_i)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_1)}$, con

$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H_0)P(H_0) + P(E_1E_2|H_1)P(H_1) + P(E_1E_2|H_2)P(H_2) =$$

$$= 1\cdot\frac{9}{16} + \frac{1}{4}\cdot\frac{6}{16} + 0\cdot\frac{1}{16} = \frac{21}{32}\,,$$

da cui segue: $P(E_j|E_i) = \frac{\frac{21}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{8}$.

7. Si ha $X \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(X=0) = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}\,,\; P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}\,,\; P(X=2) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}\,.$$

Allora: $F(x) = 0$, per $x < 0$; $F(x) = \frac{3}{10}$, per $0 \le x < 1$; $F(x) = \frac{9}{10}$, per $1 \le x < 2$; $F(x) = 1$, per $x \ge 2$. Inoltre, posto $P(X = h) = p_h$, si ha

$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{2} p_h e^{ith} = \frac{3 + 6e^{it} + e^{2it}}{10}\,.$$