Probabilità e Statistica (11/11/2013)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un oggetto O viene posizionato in un punto aleatorio (X, Y), con X e Y stocasticamente indipendenti e con $X \sim N_{1,1}$, $Y \sim N_{2,1}$. Considerati i quadrati $Q_1 = [0, 2] \times [0, 2]$ e $Q_2 = [0, 2] \times [1, 3]$, calcolare: (i) $\alpha = P(O \in Q_1 \,|\, O \in Q_2)$; (ii) $\beta = P(O \in Q_2 \,|\, O \in Q_1)$.

   $\alpha =$ $\beta =$

2. Da un lotto, contenente 6 pezzi buoni e 1 difettoso, si elimina a caso un pezzo. Poi si esaminano i 6 pezzi rimanenti, fermandosi se si trova il pezzo difettoso. Sia H l'evento *"il pezzo eliminato dal lotto è buono"* e sia X il numero aleatorio di pezzi esaminati. Calcolare la previsione di X e stabilire se $P(H \,|\, X > 2) < P(H)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $P(H \,|\, X > 2) < P(H)$?

3. Sia T il triangolo di vertici $(0, 2), (2, 0), (2, 2)$. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{3}{16}(x + y)$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare $F_1(x)$ e $\mathbb{P}(Y)$; inoltre, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

   $F_1(x) =$ $\mathbb{P}(Y) =$ *stoc. indip.*?

4. Due lotti identici, L_1, L_2, contengono ognuno 5 pezzi difettosi ed r buoni, con $r > 0$. Da L_1 si prende a caso un pezzo inserendolo in L_2; successivamente da L_2 si toglie a caso un pezzo. Considerati gli eventi $H =$ *"il pezzo inserito in L_2 è difettoso"*, $E =$ *"il pezzo estratto da L_2 è buono"*, determinare: (i) i valori di r tali che $P(H|E) < P(H)$; (ii) i valori di r tali che $P(H|E) > \frac{1}{2}$.

   $r \in$ $r \in$

5. Siano date due urne U e V, con U contenente 2 palline bianche e 4 nere e V contenente 3 palline bianche e 6 nere. Tizio effettua da U due estrazioni con restituzione, ottenendo un numero aleatorio X di palline bianche; Caio effettua da V quattro estrazioni con restituzione, ottenendo un numero aleatorio Y di palline bianche. Calcolare la funzione caratteristica e la distribuzione di probabilità del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $\varphi_Z(t) =$ $Z \sim$

6. Un sistema S è composto da due dispositivi in serie, con durate aleatorie X e Y, stocasticamente indipendenti, con funzioni di rischio $h_1(x) = 1$, $\forall x > 0$, e $h_2(y) = 2$, $\forall y > 0$. Calcolare: (i) la funzione di rischio del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S; (ii) la probabilità p dell'evento condizionato $(Z > 5 \,|\, Z > 4)$.

   $h_Z(z) =$ $p =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale, di parametri $m_0 = 2, \sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_{25})$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard σ. Posto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{25})$, con $x_1 + \cdots + x_{25} = 50$, siano m_{25} e σ_{25} la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Stabilire per quali valori di σ risulta $\sigma_{25} < \frac{1}{13}\sigma$ e calcolare la probabilità $p = P[(2 - \sigma_{25} \leq \Theta \leq 2 + 2\sigma_{25}) \,|\, \mathbf{x}]$.

   $\sigma \in$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 11/11/2013.

1. L'intersezione di Q_1, Q_2 è il rettangolo $R = [0,2] \times [1,2]$; pertanto:

$$\alpha = \frac{P(O \in Q_1 \cap Q_2)}{P(O \in Q_2)} = \frac{P(O \in R)}{P(O \in Q_2)} = \frac{P(0 \le X \le 2, 1 \le Y \le 2)}{P(0 \le X \le 2, 1 \le Y \le 3)} = \frac{P(0 \le X \le 2)P(1 \le Y \le 2)}{P(0 \le X \le 2)P(1 \le Y \le 3)} =$$

$$= \frac{P(1 \le Y \le 2)}{P(1 \le Y \le 3)} = [\frac{\Phi_{2,1}(2) - \Phi_{2,1}(1)]}{[\Phi_{2,1}(3) - \Phi_{2,1}(1)]} = \frac{[\Phi(\frac{2-2}{1}) - \Phi(\frac{1-2}{1})]}{[\Phi(\frac{3-2}{1}) - \Phi(\frac{1-2}{1})]} = \frac{[\Phi(0) - \Phi(-1)]}{[\Phi(1) - \Phi(-1)]} = \frac{[\Phi(1) - \frac{1}{2}]}{2[\Phi(1) - \frac{1}{2}]} = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre

$$\beta = \frac{P(O \in Q_1 \cap Q_2)}{P(O \in Q_1)} = \frac{P(O \in R)}{P(O \in Q_1)} = \frac{P(0 \le X \le 2, 1 \le Y \le 2)}{P(0 \le X \le 2, 0 \le Y \le 2)} = \frac{P(0 \le X \le 2)P(1 \le Y \le 2)}{P(0 \le X \le 2)P(0 \le Y \le 2)} =$$

$$= \frac{P(1 \le Y \le 2)}{P(0 \le Y \le 2)} = \frac{[\Phi_{2,1}(2) - \Phi_{2,1}(1)]}{[\Phi_{2,1}(2) - \Phi_{2,1}(0)]} = \frac{[\Phi(\frac{2-2}{1}) - \Phi(\frac{1-2}{1})]}{[\Phi(\frac{2-2}{1}) - \Phi(\frac{0-2}{1})]} = \frac{[\Phi(0) - \Phi(-1)]}{[\Phi(0) - \Phi(-2)]} =$$

$$= \frac{[\Phi(1) - \frac{1}{2}]}{[\Phi(2) - \frac{1}{2}]} \simeq \frac{0.3413}{0.4772} \simeq 0.7152\,.$$

2. Si ha $P(H) = \frac{6}{7}$, $X \in \{1, \ldots, 6\}$, con

$$P(X = h \,|\, H) = \frac{1}{6}\,,\ h = 1, \ldots, 6\,;\ P(X = h \,|\, H^c) = 0\,,\ h = 1, \ldots, 5\,;\ P(X = 6 \,|\, H^c) = 1\,.$$

Allora

$$P(X = h) = P(H)P(X = h \,|\, H) = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7}\,,\ h = 1, \ldots, 5\,;\ \ P(X = 6) = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}\,.$$

$$\mathbb{P}(X) = \frac{1}{7}(1 + 2 + \cdots + 5) + \frac{2}{7} \cdot 6 = \frac{15}{7} + \frac{12}{7} = \frac{27}{7}\,.$$

Inoltre

$$P(H \,|\, X > 2) = \frac{P(H)P(X > 2 \,|\, H)}{P(X > 2)} = \frac{\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{5}{7}} = \frac{4}{5} \ < \ \frac{6}{7} = P(H)\,.$$

3. Si ha: $f_1(x) = \frac{3}{16}\int_{2-x}^{2}(x+y)dy = \cdots = \frac{3x^2+12x}{32}$, $0 \le x \le 2$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Allora: $F_1(x) = 0$, per $x \le 0$; $F_1(x) = 1$, per $x \ge 2$; $F_1(x) = \int_0^x \frac{3t^2+12t}{32}dt = \frac{x^3+6x^2}{32}$, per $x \in (0,2)$. Inoltre: $f_2(y) = \frac{3}{16}\int_{2-y}^{2}(x+y)dx = \cdots = \frac{3y^2+12y}{32}$, $0 \le y \le 2$, con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^2 y \cdot \frac{3y^2 + 12y}{32}\, dy = \frac{1}{32}\left[\frac{3}{4}y^4 + 4y^3\right]_0^2 = \frac{11}{8}\,.$$

Infine, essendo $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$, X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha: $P(H) = \frac{5}{r+5}\,,\ \ P(H^c) = \frac{r}{r+5}\,,\ \ P(E|H) = \frac{r}{r+6}\,,\ \ P(E|H^c) = \frac{r+1}{r+6}$. Allora

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{5}{r+5} \cdot \frac{r}{r+6}}{\frac{5}{r+5} \cdot \frac{r}{r+6} + \frac{r}{r+5} \cdot \frac{r+1}{r+6}} = \frac{5}{r+6} \ < \ \frac{5}{r+5}\,,\ \forall\, r\,;$$

ovvero $P(H|E) < P(H)$, per ogni intero $r \in \{1, 2, \ldots\}$. Inoltre: $P(H|E) > \frac{1}{2}$, per $r = 1, 2, 3$.

5. X e Y sono stocasticamente indipendenti, con $X \sim B(2, \frac{1}{3})$ e $Y \sim B(4, \frac{1}{3})$; pertanto, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione binomiale $B(n, p)$ è $(pe^{it}+q)^n$, segue: $\varphi_X(t) = (\frac{1}{3}\, e^{it} + \frac{2}{3})^2$, $\varphi_Y(t) = (\frac{1}{3}\, e^{it} + \frac{2}{3})^4$. Allora
$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{itX+itY}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = (\frac{1}{3}\, e^{it} + \frac{2}{3})^2(\frac{1}{3}\, e^{it} + \frac{2}{3})^4 =$
$= (\frac{1}{3}\, e^{it} + \frac{2}{3})^6$. Pertanto: $Z \sim B(6, \frac{1}{3})$.

6. Si ha

$$f_1(x) = h_1(x)e^{-\int_0^x h_1(t)dt} = \cdots = e^{-x}\,,\ x \geq 0\,; \qquad f_2(y) = \cdots = 2e^{-2y}\,,\ y \geq 0\,;$$

ovvero: $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$. Essendo $Z = min\{X, Y\}$, per ogni $z \geq 0$ si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-z}e^{-2z} = e^{-3z}\,.$$

Pertanto: $f_Z(z) = -S'_Z(z) = 3e^{-3z}$ (*distribuzioni esponenziale di parametro* $\lambda = 3$). Allora

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{3e^{-3z}}{e^{-3z}} = 3\,, \quad z \geq 0\,.$$

Inoltre

$$p = P(Z > 5 \,|\, Z > 4) = \frac{P(Z > 5, Z > 4)}{P(Z > 4)} = \frac{P(Z > 5)}{P(Z > 4)} = \frac{S_Z(5)}{S_Z(4)} = \frac{e^{-15}}{e^{-12}} = e^{-3} = P(Z > 1)\,.$$

7. Si ha: $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_{25},\sigma_{25}}$, con $\bar{\mathbf{x}} = m_0 = 2$, $m_{25} = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{25}{\sigma^2}\cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{25}{\sigma^2}} = 2\,,\quad \frac{1}{\sigma_{25}^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{25}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2+25}{\sigma^2}$; pertanto $\sigma_{25} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+25}} < \frac{1}{13}\sigma \iff \sigma > 12$. Inoltre

$p = P[(2 - \sigma_{25} \leq \Theta \leq 2 + 2\sigma_{25}) \,|\, \mathbf{x}] = \Phi_{2,\sigma_{25}}(2 + 2\sigma_{25}) - \Phi_{2,\sigma_{25}}(2 - \sigma_{25}) = \Phi(2) - \Phi(-1) =$
$= \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \ \simeq\ 0.8185.$