Probabilità e Statistica (11/4/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. I costituenti relativi a tre eventi A, B, C, con A e C incompatibili, sono giudicati ugualmente probabili. Calcolare $P(A)$ e $P(B \vee C)$. Inoltre, posto $X = |A| - |AB| - |B| + |BC|$, calcolare la previsione di X.

   $P(A) =$ $\qquad\qquad$ $P(B \vee C) =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(X) =$

2. Il tempo aleatorio X impiegato da una persona per completare un lavoro ha una densità $f(x) = k(x^2 + x)$, per $x \in [0, 1]$ e zero altrove. Calcolare il valore della costante k, la funzione di ripartizione $F(x)$ e lo scarto quadratico medio σ_X.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $F(x) = \begin{cases} \\ \\ \end{cases}$ $\qquad\qquad$ $\sigma_X =$

3. Una popolazione è composta da 4.845 maschi fumatori, 46.155 maschi non fumatori, 833 femmine fumatrici e 48.167 femmine non fumatrici. Un individuo viene selezionato a caso dalla popolazione. Definiti gli eventi: H="l'individuo è un maschio", E="l'individuo è un fumatore ", calcolare le seguenti probabilità: $P(H|E)$, $P(H|E^c)$, $P(E^c|H)$.

   $P(H|E) =$ $\qquad\qquad$ $P(H|E^c) =$ $\qquad\qquad$ $P(E^c|H) =$

4. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 2), (2, 0), (2, 2)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [0, 2]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [0, 2]$; inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   $f_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $f_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $\rho_{XY} =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = 4ye^{-x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Posto $Z = X + Y$, calcolare, per ogni $z > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di Z.

   $S_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

6. La funzione caratteristica di cinque numeri aleatori $X_1, \cdots, X_5$, ugualmente distribuiti e stocasticamente indipendenti, è $\varphi(t) = e^{-5t^2}$. Indicando con Z la media aritmetica di $X_1, \cdots, X_5$, calcolare la funzione caratteristica di Z e la probabilità p dell'evento condizionato $(-\sqrt{2} \leq Z \leq \sqrt{2}) \,|\, (-2\sqrt{2} \leq Z \leq 2\sqrt{2})$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = \sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_8)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_8)$, con $x_1 + \cdots + x_8 = 8$, calcolare la probabilità condizionata $p = P(\frac{3}{5} \leq \Theta \leq \frac{7}{5} \mid \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin.- Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 11/4/2014.

1. Essendo $ABC = AB^cC = \emptyset$, i costituenti sono: $ABC^c, AB^cC^c, A^cBC, A^cBC^c, A^cB^cC, A^cB^cC^c$, tutti di probabilità $\frac{1}{6}$. Allora $P(A) = P(ABC^c) + P(AB^cC^c) = \frac{1}{3}$; inoltre
$$P(B \vee C) = P(ABC^c) + P(A^cBC) + P(A^cBC^c) + P(A^cB^cC) = \frac{2}{3}\,.$$
Infine, essendo $|A| = |AB| + |AB^c|$ e $|B| = |BC| + |BC^c|$, segue $X = |AB^c| - |BC^c|$; pertanto
$$\mathbb{P}(X) = P(AB^c) - P(BC^c) = P(AB^cC^c) - P(ABC^c) - P(A^cBC^c) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}\,.$$

2. Si ha
$$\int_0^1 k(x^2+x)dx = k\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}\,k = 1\,;$$
pertanto: $k = \frac{6}{5}$. Allora, per ogni $x \in (0,1)$, si ha: $F(x) = \int_0^x \frac{6}{5}(t^2+t)dt = \frac{2}{5}\,x^3 + \frac{3}{5}\,x^2$; inoltre: $F(x) = 0$, per $x \le 0$; $F(x) = 1$, per $x \ge 1$. Infine
$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{6}{5}\int_0^1 (x^3+x^2)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{10}\,;$$
$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{6}{5}\int_0^1 (x^4+x^3)dx = \frac{6}{5}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{27}{50}\,;$$
allora: $\sigma_X^2 = \frac{27}{50} - \frac{49}{100} = \frac{1}{20}$, da cui segue: $\sigma_x = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

3. Si ha
$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(EH) + P(EH^c)} = \frac{4.845}{4.845 + 833} = \frac{4.845}{5.678} \simeq 0,8533\,;$$
$$P(H|E^c) = \frac{P(E^cH)}{P(E^cH) + P(E^cH^c)} = \frac{46.155}{46.155 + 48.167} = \frac{46.155}{94.322} \simeq 0,4893\,;$$
$$P(E^c|H) = \frac{P(E^cH)}{P(EH) + P(E^cH)} = \frac{46.155}{4.845 + 46.155} = \frac{46.155}{51.000} = 0,905\,.$$

4. L'area di T è $\mu(T) = 2$; pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(2,0),(0,2)$ ha equazione: $x + y = 2$; allora
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_{2-x}^{2} \frac{1}{2}\,dy = \frac{x}{2}\,,\ x \in [0,2]\,,$$
con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_{2-y}^{2} \frac{1}{2}dx = \frac{y}{2}\,,\ y \in [0,2]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; pertanto X e Y sono ugualmente distribuiti, con
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2}\,dx = \cdots = \frac{4}{3}\,,\ \ \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2}\,dx = \cdots = 2\,,$$

quindi: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{2}{9}$. Inoltre

$$\mathbb{P}(XY) = \int_0^2 \int_{2-x}^2 \frac{1}{2}\, xy\, dxdy = \frac{1}{4}\int_0^2 x[y^2]_{2-x}^2 dx = \frac{1}{4}\int_0^2 (4x^2 - x^3)dx = \frac{5}{3}\,.$$

Pertanto: $\sigma_{XY} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{1}{9} < 0$; allora: $\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_1\sigma_2} = \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = -\frac{1}{2}$.

5. Per ogni $z > 0$ si ha

$$P(Z \le z) = F_Z(z) = P(X+Y \le z) = \int_0^z dy \int_0^{z-y} 4ye^{-x-2y}dx = \int_0^z \left(4ye^{-2y}\int_0^{z-y} e^{-x}dx\right) dy =$$

$$= \int_0^z 4ye^{-2y}(1 - e^{-(z-y)})dy = \int_0^z 4ye^{-2y}dy - \int_0^z 4ye^{-2y}e^{-z+y}dy =$$

$$= [-2ye^{-2y}]_0^z + \int_0^z 2e^{-2y}dy - 4e^{-z}\int_0^z ye^{-y}dy =$$

$$= -2ze^{-2z} + (1-e^{-2z}) - 4e^{-z}\left\{[-ye^{-y}]_0^z + \int_0^z e^{-y}dy\right\} = -2ze^{-2z} + 1 - e^{-2z} - 4e^{-z}\left\{-ze^{-z} + (1 - e^{-z})\right\} =$$

$= \cdots = (3+2z)e^{-2z} - 4e^{-z} + 1$. Pertanto: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = 4e^{-z} - (3+2z)e^{-2z}\,,\ z > 0$.
Inoltre: $f_Z(z) = F'_Z(z) = -S'_Z(z) = \cdots = 4e^{-z} - (4+4z)e^{-2z}\,,\ z > 0$. Allora

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-z} - (4+4z)e^{-2z}}{4e^{-z} - (3+2z)e^{-2z}} = \frac{4e^z - 4 - 4z}{4e^z - 3 - 2z} = 1 - \frac{1+2z}{4e^z - 3 - 2z}\,,\ z > 0\,.$$

6. Essendo $X_1, \cdots, X_5$ stocasticamente indipendenti, posto $Y = X_1 + \cdots + X_5$, si ha $\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdots\varphi_{X_5}(t) = e^{-25t^2}$, ed essendo $Z = \frac{Y}{5}$ segue

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{5}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{5}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{5}\right) = e^{-t^2}\,.$$

Pertanto, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione $N_{m,\sigma}$ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, segue che Z ha una distribuzione normale $N_{0,\sqrt{2}}$. Allora

$$p = P[(-\sqrt{2} \le Z \le \sqrt{2}) \,|\, (-2\sqrt{2} \le Z \le 2\sqrt{2})] = \frac{P(-\sqrt{2} \le Z \le \sqrt{2}\,,\, -2\sqrt{2} \le Z \le 2\sqrt{2})}{P(-2\sqrt{2} \le Z \le 2\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{P(-\sqrt{2} \le Z \le \sqrt{2})}{P((-2\sqrt{2} \le Z \le 2\sqrt{2})} = \frac{\Phi_{0,\sqrt{2}}(\sqrt{2}) - \Phi_{0,\sqrt{2}}(-\sqrt{2})}{\Phi_{0,\sqrt{2}}(2\sqrt{2}) - \Phi_{0,\sqrt{2}}(-2\sqrt{2})} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(2) - \Phi(-2)} =$$

$$= \frac{2\Phi(1) - 1}{2\Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.6826}{0.9544} \simeq 0.7152\,.$$

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_8,\sigma_8}$, con $m_8 = 1$ essendo $\overline{x} = m_0 = 1$. Inoltre: $\frac{1}{\sigma_8^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{8}{\sigma^2} = 1 + \frac{8}{\frac{1}{3}} = 25$, e quindi $\sigma_8 = \frac{1}{5}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{1,\frac{1}{5}}$. Allora

$$p = P\left(\frac{3}{5} \le \Theta \le \frac{7}{5} \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{1,\frac{1}{5}}(\frac{7}{5}) - \Phi_{1,\frac{1}{5}}(\frac{3}{5}) = \Phi\left(\frac{\frac{7}{5} - 1}{\frac{1}{5}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{3}{5} - 1}{\frac{1}{5}}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) =$$

$$= 2\Phi(2) - 1 \simeq 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544.$$