Probabilità e Statistica (10/6/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna contenente 2 palline rosse e 2 bianche si effettuano 3 estrazioni sequenziali. Ad ogni estrazione, se la pallina estratta è rossa si inseriscono nell'urna la pallina estratta più altre 2 palline bianche; se invece è bianca, si inseriscono la pallina estratta più altre 2 palline rosse. Indicando con E_i l'evento "la i-esima pallina estratta è bianca", $i = 1, 2, 3$, verificare se: (i) $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3)$; (ii) $P(E_1E_2) = P(E_2E_3) = P(E_1E_3)$.

   (i) *SI* *NO* (ii) *SI* *NO*

2. Il tempo aleatorio X impiegato da una persona per completare un lavoro ha una densità $f(x) = a(3x^2 + 2x)$, per $x \in [0, 1]$ e zero altrove. Calcolare il valore della costante a, la funzione di ripartizione $F(x)$ e la varianza di X.

   $a =$ $F(x) =$ $Var(X) =$

3. Da un'urna, contenente 7 palline numerate da 1 a 7, Tizio e Caio effettuano ciascuno 3 estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $A =$ *"Tizio ottiene sempre un numero pari oppure sempre un numero dispari"*, $B =$ *"Caio ottiene sempre un numero inferiore a 4 oppure sempre superiore a 3"*, calcolare $P(A|A \vee B)$, $P(B|A \vee B)$ e $P(AB|A \vee B)$.

   $P(A|A\vee B) =$ $P(B|A\vee B) =$ $P(AB|A\vee B) =$

4. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (0, 4), (4, 0)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [0, 4]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [0, 4]$; inoltre, calcolare la densità di probabilità $g(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per $z \in [0, 4]$.

   $f_1(x) =$ $f_2(y) =$ $g(z) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = 4x^2e^{-2x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di X.

   $S_1(x) =$ $h_1(x) =$

6. La funzione caratteristica di due numeri aleatori X_1, X_2, ugualmente distribuiti e stocasticamente indipendenti, è $\varphi(t) = e^{it-t^2}$. Indicando con Z la media aritmetica di X_1, X_2, calcolare la funzione caratteristica di Z; inoltre, utilizzando la funzione caratteristica, calcolare la previsione m e la varianza σ^2 di Z.

   $\varphi_Z(t) =$ $m =$ $\sigma^2 =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 2$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_4)$, con $x_1 + \cdots + x_4 = 8$, calcolare il valore a tale che $P(2 - a \leq \Theta \leq 2 + a \mid \mathbf{x}) = 2\Phi(1) - 1$.

   $a =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin.- Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 10/6/2014.

1. Si ha

$$P(E_1) = \frac{1}{2}\,,\quad P(E_2|E_1) = \frac{2}{4+2} = \frac{1}{3}\,,\quad P(E_2^c|E_1) = \frac{2}{3}\,,\quad P(E_2|E_1^c) = \frac{2+2}{4+2} = \frac{2}{3}\,,\quad P(E_2^c|E_1^c) = \frac{1}{3}\,.$$

Pertanto: $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P(E_1)$; inoltre

$$P(E_3|E_2E_1) = \frac{2+0+0}{4+2+2} = \frac{1}{4}\,,\quad P(E_3|E_2E_1^c) = \frac{2+2+0}{4+2+2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$P(E_3|E_2^cE_1) = \frac{2+0+2}{4+2+2} = \frac{1}{2}\,,\quad P(E_3|E_2^cE_1^c) = \frac{2+2+2}{4+2+2} = \frac{3}{4}\,.$$

Quindi: $P(E_3) = P(E_3|E_2E_1)P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_3|E_2E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) +$
$+ P(E_3|E_2^cE_1)P(E_2^c|E_1)P(E_1) + P(E_3|E_2^cE_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_1^c) =$
$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = P(E_1)$.

Infine: $P(E_2E_1) = P(E_2|E_1)P(E_1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$; $P(E_3E_2) =$
$= P(E_3|E_2E_1)P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_3|E_2E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{24}$;
$P(E_1E_3) = P(E_3|E_2E_1)P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_3|E_2^cE_1)P(E_2^c|E_1)P(E_1) = \cdots = \frac{5}{24}$.

Quindi: $P(E_1E_2) \neq P(E_1E_3) = P(E_2E_3)$.

2. Si ha

$$\int_0^1 a(3x^2+2x)dx = a\left[x^3+x^2\right]_0^1 = 2a = 1\,;$$

pertanto: $a = \frac{1}{2}$. Allora, per ogni $x \in (0,1)$, si ha: $F(x) = \int_0^x \frac{1}{2}(3t^2+2t)dt = \frac{1}{2}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2$;
inoltre: $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$. Infine

$$\mathbb{P}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^3+2x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right) = \frac{17}{24}\,;$$

$$\mathbb{P}(X^2) = \int_0^1 x^2f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^4+2x^3)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{20}\,;$$

pertanto: $Var(X) = \frac{11}{20} - \frac{289}{576} = \frac{139}{2880}$.

3. Si ha: $P(A) = (\frac{3}{7})^3 + (\frac{4}{7})^3 = \frac{13}{49} = P(B)$; inoltre A e B sono stocasticamente indipendenti. Allora, osservando che $P(A) = P(B)$, si ottiene

$$P(A|A\vee B) = \frac{P(A)}{P(A\vee B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)} = \frac{1}{2-P(A)} = \frac{49}{85} = P(B|A\vee B)\,.$$

Infine

$$P(AB|A\vee B) = \frac{P(AB)}{P(A\vee B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)} = \frac{P(A)}{2-P(A)} = \frac{13}{85}\,.$$

4. L'area di T è $\mu(T) = 8$; pertanto: $f(x, y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{8}$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(4, 0), (0, 4)$ ha equazione: $x + y = 4$; allora

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy = \int_0^{4-x} \frac{1}{8}\, dy = \frac{4-x}{8}\,,\ x \in [0, 4]\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_0^{4-y} \frac{1}{8} dx = \frac{4-y}{8}$, $y \in [0, 4]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; ovvero, X e Y sono ugualmente distribuiti. Inoltre, fissato $z \in [0, 4]$, si ha

$$G(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} \frac{1}{8}\, dy = \int_0^z \frac{z-x}{8}\, dx = \frac{z^2}{16}\,,$$

con $G(z) = 0$, per $z < 0$, e con $G(z) = 1$, per $z > 4$. Allora, $g(z) = G'(z) = \frac{z}{8}$, per $z \in [0, 4]$, con $g(z) = 0$ altrove.
(*Nota: essendo la distribuzione uniforme, $G(z)$ si può anche calcolare come rapporto tra l'area del triangolo T_z, di vertici* $(0, 0), (0, z), (z, 0)$, *e l'area del triangolo* T)

5. Per ogni $x > 0$ si ha

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} 4x^2 e^{-2x-y} dy = 4x^2 e^{-2x} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 4x^2 e^{-2x}\,;$$

ovvero, X ha una distribuzione Gamma di parametri $c = 3, \lambda = 2$. Allora

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_1(t) dt = \int_x^{+\infty} 4t^2 e^{-2t} dt = [-2t^2 e^{-2t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 4te^{-2t} dt =$$

$$= 2x^2 e^{-2x} + [-2te^{-2t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 2e^{-2t} dt = 2x^2 e^{-2x} + 2xe^{-2x} + e^{-2x}\,.$$

Pertanto

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{4x^2 e^{-2x}}{2x^2 e^{-2x} + 2xe^{-2x} + e^{-2x}} = \frac{4x^2}{2x^2 + 2x + 1}\,,\ x > 0\,.$$

6. Essendo X_1, X_2 stocasticamente indipendenti, posto $Y = X_1 + X_2$, si ha: $\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) = e^{2it-2t^2}$, ed essendo $Z = \frac{Y}{2}$ segue

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{2}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{2}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{2}\right) = e^{it-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Inoltre, ricordando la relazione $\mathbb{P}(Z^k) = m^{(k)} = \frac{\varphi_Z^{(k)}(0)}{i^k}$ e osservando che

$$\varphi_Z'(t) = (i-t)e^{it-\frac{t^2}{2}}\,, \quad \varphi_Z''(t) = (i-t)^2 e^{it-\frac{t^2}{2}} - e^{it-\frac{t^2}{2}}\,,$$

si ottiene $\varphi_Z'(0) = i\,;\ \ \varphi_Z''(0) = i^2 - 1 = -2$, da cui segue: $m = \mathbb{P}(X) = 1$, $\mathbb{P}(X^2) = 2$; infine: $\sigma^2 = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = 1$. (*Nota:* $X_1 \sim N_{1,\sqrt{2}}\,,\ X_2 \sim N_{1,\sqrt{2}}\,,\ Z \sim N_{1,1}$)

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_4,\sigma_4}$, con $m_4 = 2$ essendo $\overline{x} = m_0 = 2$. Inoltre: $\frac{1}{\sigma_4^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{4}{\sigma^2} = 1 + \frac{4}{\frac{1}{2}} = 9$, e quindi $\sigma_4 = \frac{1}{3}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{2,\frac{1}{3}}$. Allora, (ricordando che Φ è una funzione crescente) si ha

$$P\left(2 - a \le \Theta \le 2 + a \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{2,\frac{1}{3}}(2+a) - \Phi_{2,\frac{1}{3}}(2-a) = \Phi\left(\frac{2+a-2}{\frac{1}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{2-a-2}{\frac{1}{3}}\right) =$$

$$= \Phi(3a) - \Phi(-3a) = 2\Phi(3a) - 1 \ = \ 2\Phi(1) - 1 \iff \Phi(3a) = \Phi(1) \iff a = \sigma_4 = \tfrac{1}{3}.$$