Probabilità e Statistica (11/9/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U, contenente 2 palline bianche e 2 nere, e V, contenente 1 pallina bianca e 1 nera, da U si prendono a caso 2 palline che vengono inserite in V. Successivamente, da V si prende a caso 1 pallina che viene inserita in U. Sia H_r l'evento *"al termine dell'esperimento U contiene r palline bianche"*. Determinare i possibili valori di r e le corrispondenti probabilità $P(H_r)$. (*indicare con X il numero aleatorio di palline bianche inserite in V e con E l'evento "la pallina estratta da V e inserita in U è bianca"*)

   r : $\qquad\qquad$ $P(H_r)$:

2. Con riferimento all'esercizio precedente, sia Y il numero aleatorio di palline bianche in U al termine dell'esperimento. Calcolare la previsione di Y e la probabilità γ dell'evento condizionato $(X = 1)|(X + Y = 3)$.

   $\mathbb{P}(Y) =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. La densità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = a$, per $x \in [0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di ripartizione $F(x)$. Inoltre, indicando con m la previsione di X, stabilire se $P(X > m) = P(X \leq m)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > m) = P(X \leq m)$?

4. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$, per $x \geq 0, x \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e verificare se le densità marginali sono uguali; inoltre, calcolare la varianza di X.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $f_1 = f_2$? $\qquad\qquad$ $Var(X) =$

5. con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione di ripartizione $F_2(y)$, per $y > 0$, e la funzione di rischio $h_1(x)$, per $x > 0$.

   $F_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$

6. Le funzioni caratteristiche di due guadagni aleatori stocasticamente indipendenti X, Y, relativi a due investimenti finanziari, sono $\varphi_X(t) = e^{it-\frac{t^2}{2}}$, $\varphi_Y(t) = e^{2it-4t^2}$. Indicando con Z la media aritmetica $\frac{X+Y}{2}$, calcolare la previsione m_Z, lo scarto quadratico medio σ_Z e la funzione caratteristica $\varphi_Z(t)$.

   $m_Z =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

7. Da un'urna, contenente 1 pallina bianca e 1 nera, si effettuano 3 estrazioni senza restituzione, aggiungendo ogni volta nell'urna 1 pallina bianca e 1 nera. Definiti gli eventi E_i = *"nell'i-ma estrazione si ottiene pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili e se sono scambiabili.

   E_1, E_2, E_3 *equiprobabili* ? $\qquad\qquad$ E_1, E_2, E_3 *scambiabili* ?

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin.- Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 11/9/2014.

1. I valori possibili di r sono: $0, 1, 2, 3$; inoltre: $H_0 = (X = 2) \wedge E^c$, $H_3 = (X = 0) \wedge E$, $H_1 = [(X = 1) \wedge E^c] \vee [(X = 2) \wedge E]$, $H_2 = [(X = 1) \wedge E] \vee [(X = 0) \wedge E^c]$, con

$$P(H_0) = P(X = 2)P(E^c|X = 2) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24} = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{1}{4} = P(X = 0)P(E|X = 2) = P(H_3)\,,$$

$$P(H_1) = P(X = 1)P(E^c|X = 1) + P(X = 2)P(E|X = 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{2}{4} + \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{24}\,,$$

$$P(H_2) = P(X = 1)P(E|X = 1) + P(X = 0)P(E^c|X = 0) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{2}{4} + \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} \cdot \frac{3}{4} = \frac{11}{24}\,.$$

2. Si ha: $X \in \{0, 1, 2\}$, $Y = 2 - X + |E|$, $(X, Y) \in \{(0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1)\}$, $Y \in \{0, 1, 2, 3\}$, con $P(X = 0) = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{4}{6}$, $P(X = 2) = \frac{1}{6}$; inoltre

$$\mathbb{P}(X) = 0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{4}{6}+2\cdot\frac{1}{6} = 1\,,\quad P(E) = \sum_{r=0}^{2} P(X = r)P(E|X = r) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\,,$$

da cui segue: $\mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(2 - X + |E|) = 2 - \mathbb{P}(X) + P(E) = 2 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.
In alternativa: poichè $(Y = r) = H_r$, segue: $Y = 0 \cdot |H_0| + 1 \cdot |H_1| + 2 \cdot |H_2| + 3 \cdot |H_3|$; allora: $\mathbb{P}(Y) = \sum_r rP(H_r) = \cdots = \frac{3}{2}$.
Infine: $\gamma = P(X = 1)|(X + Y = 3) = \frac{P(X=1,X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=0,Y=3)+P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)}$,
con $P(X = 1, Y = 2) = P(X = 1)P(Y = 2|X = 1) = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$,
$P(X = 0, Y = 3) = P(X = 0)P(Y = 3|X = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$,
$P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2)P(Y = 1|X = 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{24}$;
pertanto: $\gamma = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{24}+\frac{1}{3}+\frac{3}{24}} = \frac{2}{3}$.

3. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 adx + \int_2^3 adx + \int_4^5 adx = 3a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{3}$. Allora: $F(x) = 0$, per $x \le 0$; $F(x) = \int_0^x \frac{1}{3}dt = \frac{x}{3}$, per $x \in (0, 1)$; $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}$, per $x \in [1, 2]$; $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}dt + \int_2^x \frac{1}{3}dt = \frac{x-1}{3}$, per $x \in (2, 3)$; $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}dt + \int_2^3 \frac{1}{3}dt = \frac{2}{3}$, per $x \in [3, 4]$; $F(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}dt + \int_2^3 \frac{1}{3}dt + \int_4^x \frac{1}{3}dt = \frac{x-2}{3}$, per $x \in (4, 5)$; $F(x) = 1$, per $x \ge 5$. Inoltre, come si può ottenere direttamente dal diagramma di $f(x)$, si ha: $m = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$; infatti

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{3}dx + \int_2^3 \frac{x}{3}dx + \int_4^5 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{6}([x^2]_0^1 + [x^2]_2^3 + [x^2]_4^5) = \frac{5}{2}\,.$$

Infine

$$P(X > m) = \int_m^{+\infty} f(x)dx = \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{1}{3}dx + \int_4^5 \frac{1}{3}dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{1}{3}dx = P(X \le m)\,.$$

4. Si ha: $\int_0^{+\infty}\int_x^{2x} f(x,y)dxdy = a\int_0^{+\infty}(e^{-x}\int_x^{2x} e^{-y}dy)dx = a\int_0^{+\infty} e^{-x}[-e^{-y}]_x^{2x}dx =$
$= a\int_0^{+\infty} e^{-x}(e^{-x}-e^{-2x})dx = a\int_0^{+\infty}(e^{-2x}-e^{-3x})dx = a[-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{3}e^{-3x}]_0^{+\infty} = a(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) =$
$= \frac{a}{6} = 1$; pertanto: $a = 6$. Inoltre, per ogni $x > 0, y > 0$, si ha

$$f_1(x) = \int_x^{2x} 6e^{-x-y}dy = 6e^{-x}(e^{-x}-e^{-2x}) = 6e^{-2x} - 6e^{-3x} = 3\cdot 2e^{-2x} - 2\cdot 3e^{-3x}\,,$$

$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{2}}^{y} 6e^{-x-y}dx = 6e^{-y}(e^{-\frac{y}{2}} - e^{-y}) = 6e^{-\frac{3}{2}y} - 6e^{-2y} = 4\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3\cdot 2e^{-2y}\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove; quindi le densità marginali non sono uguali. Infine, ricordando che per ogni fissato $\lambda > 0$, si ha: $\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}\,,\quad \int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$, segue:
$\mathbb{P}(X) = 3\int_0^{+\infty} x\cdot 2e^{-2x}dx - 2\int_0^{+\infty} x\cdot 3e^{-3x}dx = 3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{5}{6}$,
$\mathbb{P}(X^2) = 3\int_0^{+\infty} x^2\cdot 2e^{-2x}dx - 2\int_0^{+\infty} x^2\cdot 3e^{-3x}dx = 3\cdot\frac{2}{4} - 2\cdot\frac{2}{9} = \frac{19}{18}$; pertanto:
$Var(X) = \frac{19}{18} - (\frac{5}{6})^2 = \frac{13}{36}$.

5. Si ha: $F_2(y) = 0$ per $y \leq 0$; inoltre, ricordando che $\int_0^y \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda y}$, per ogni fissato $y > 0$ si ha: $F_2(y) = \int_0^y f_2(t)dt = \int_0^y(4\cdot\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}y} - 3\cdot 2e^{-2y})dt = 4\int_0^y \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}dt - 3\int_0^y 2e^{-2t}dt =$
$= 4(1-e^{-\frac{3}{2}y}) - 3(1-e^{-2y}) = 3e^{-2y} - 4e^{-\frac{3}{2}y} + 1$. Inoltre, osservando che $\int_x^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda x}$, per ogni $x > 0$ si ha: $S_1(x) = \int_x^{+\infty} f_1(t)dt = \int_x^{+\infty} f_1(t)dt = \int_x^{+\infty}(3\cdot 2e^{-2t} - 2\cdot 3e^{-3t})dt =$
$3e^{-2x} - 2e^{-3x}$, da cui segue: $h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{3\cdot 2e^{-2x} - 2\cdot 3e^{-3x}}{3e^{-2x} - 2e^{-3x}} = \frac{6e^x - 6}{3e^x - 2}$.

6. Ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione normale di parametri m, σ è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, segue $X \sim N_{1,1}$, $Y \sim N_{2,2\sqrt{2}}$; quindi

$$m_Z = \frac{m_X + m_Y}{2} = \frac{3}{2}\,,\qquad \sigma_Z = \sqrt{\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{4}} = \frac{3}{2}\,.$$

Procedimento alternativo:

$$m_X = \mathbb{P}(X) = \frac{\varphi_X'(0)}{i} = \cdots, m_X^{(2)} = \mathbb{P}(X^2) = \frac{\varphi_X''(0)}{i^2} = \cdots, m_Y = \cdots,\ m_Y^{(2)} = \cdots,\ ......$$

Inoltre, essendo $\varphi_{\frac{X}{2}}(t) = \mathbb{P}(e^{it\frac{X}{2}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{2}X}) = \varphi_X(\frac{t}{2}) = e^{\frac{1}{2}it - \frac{t^2}{8}}$, $\varphi_{\frac{Y}{2}}(t) = \varphi_Y(\frac{t}{2}) = e^{it - t^2}$,
$Z = \frac{X}{2} + \frac{Y}{2}$, con $\frac{X}{2}$ e $\frac{Y}{2}$ indipendenti, segue: $\varphi_Z(t) = \varphi_{\frac{X}{2}}(t)\varphi_{\frac{Y}{2}}(t) = e^{\frac{1}{2}it - \frac{t^2}{8}}e^{it - t^2} = e^{\frac{3}{2}it - \frac{9}{8}t^2}$.

7. Si ha: $P(E_1) = \frac{1}{2}\,,\ P(E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) + P(E_1^c)P(E_2|E_1^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,,$
$P(E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) + P(E_1)P(E_2^c|E_1)P(E_3|E_1E_2^c) + P(E_1^c)P(E_2|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2) +$
$+ P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3|E_1^cE_2^c) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.
Pertanto E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili; inoltre: $P(E_1E_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,
$P(E_1E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{5}{24} \neq P(E_1E_2)$; quindi
E_1, E_2, E_3 non sono scambiabili.

Nota: $P(E_2E_3) = P(E_1E_2E_3) + P(E_1^cE_2E_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} = \frac{5}{24} = P(E_1E_3)$.