Probabilità e Statistica (24/10/2014)

(Ing. Civ. - Trasp. - Clin. - Elettr., Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 5-6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U, contenente 2 palline bianche e 2 nere, e V, inizialmente vuota, da U si prendono a caso 3 palline che vengono inserite in V. Successivamente, da V si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Siano X ed Y, rispettivamente, il numero aleatorio di palline bianche inserite in V ed il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Calcolare la previsione di X, il codominio $\mathcal{C}$ del vettore aleatorio (X, Y) e la varianza di Y.

   $m_X =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathcal{C} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma_Y^2 =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la covarianza di X, Y e la probabilità γ dell'evento condizionato $(Y = 1)|(X + Y \geq 3)$.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. Dato un numero aleatorio X, con distribuzione normale di parametri $m = 1, \sigma = 2$, e posto $Y = 2X - 1, Z = -X + 2$, calcolare la covarianza e il coefficiente di correlazione di Y, Z. Inoltre, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(Y + Z > 6 \,|\, Y + Z > 0)$.

   $Cov(Y, Z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\rho_{YZ} =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

4. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(1, 2), (2, 1), (2, 2)$. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti e calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(X \leq \frac{3}{2} \,|\, Y \geq \frac{3}{2})$.

   X, Y indipendenti ? $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio 3, posto $U = Y + Z$, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_U(t)$; inoltre, posto $V = \frac{U-2}{2}$, calcolare la previsione m_V e lo scarto quadratico medio σ_V.

   $\varphi_U(t) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $m_V =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma_V =$

6. La densità di probabilità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-3y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di rischio $h_Z(z)$ del numero aleatorio $Z = X + Y$, per $z > 0$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Con riferimento all'esercizio 1, si supponga che le estrazioni senza restituzione effettuate dall'urna V siano 3. Definiti gli eventi $E_i =$ *"nell'i-ma estrazione si ottiene pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3$, stabilire se E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili e se sono scambiabili.

   E_1, E_2, E_3 *equiprobabili ?* $\qquad\qquad\qquad$ E_1, E_2, E_3 *scambiabili ?*

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Clin.- Elettr., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 24/10/2014.

1. Si ha $X \sim H(4,3,\frac{1}{2})$, con $X \in \{1,2\}$ e con $P(X=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2} = P(X=2)$; pertanto $m_X = np = \frac{3}{2}$ $(= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 2)$. Inoltre, se $X=1$, si ha $Y \in \{0,1\}$; se $X=2$, si ha $Y \in \{1,2\}$; pertanto: $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2)\}$. Infine, $Y \in \{0,1,2\}$, con
$$P(Y=0) = P(X=1,Y=0) = P(X=1)P(Y=0|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$P(Y=2) = P(X=2,Y=2) = P(X=2)P(Y=2|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$
$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) - P(Y=2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$
da cui segue: $\mathbb{P}(Y) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\frac{1}{6} = 1$, $\mathbb{P}(Y^2) = 0^2\cdot\frac{1}{6} + 1^2\cdot\frac{2}{3} + 2^2\cdot\frac{1}{6} = \frac{4}{3}$.
Pertanto: $\sigma_Y^2 = \mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(Y)]^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$.

2. Si ha $\mathbb{P}(X) = \frac{3}{2}$, $\mathbb{P}(Y) = 1$, $XY \in \{0,1,2,4\}$, con $P(XY=0) = P(X=1,Y=0) = \frac{1}{6}$,
$$P(XY=1) = P(X=1,Y=1) = P(X=1)P(Y=1|X=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(XY=2) = P(X=2,Y=1) = P(X=2)P(Y=1|X=2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(XY=4) = P(X=2,Y=2) = \frac{1}{6},$$
da cui segue: $\mathbb{P}(XY) = 0\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{3}$; pertanto: $Cov(X,Y) = \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6}$.
Inoltre: $\gamma = P(Y=1\,|\,X+Y\geq 3) = \frac{P(Y=1,X+Y\geq 3)}{P(X+Y\geq 3)} = \frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2,Y=1)+P(X=2,Y=2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}$.

3. Si ha: $Cov(Y,Z) = Cov(2X-1,-X+2) = -2Cov(X,X) = -2Var(X) = -8$; inoltre $\sigma_Y = 2\sigma_X = 4, \sigma_Z = \sigma_X = 2$; pertanto: $\rho_{YZ} = \frac{Cov(Y,Z)}{\sigma_Y\sigma_Z} = -\frac{8}{8} = -1$ (tale risultato seguirebbe anche osservando che $Y = -2Z+3$). Infine, essendo $Y+Z = X+1$, segue
$$p = P(Y+Z>6\,|\,Y+Z>0) = P(X>5\,|\,X>-1) = \frac{P(X>5,X>-1)}{P(X>-1)} = \frac{P(X>5)}{P(X>-1)} =$$
$$= \frac{1-\Phi_{1,2}(5)}{1-\Phi_{1,2}(-1)} = \frac{1-\Phi(2)}{1-\Phi(-1)} = \frac{1-\Phi(2)}{\Phi(1)} \simeq \frac{1-0.9772}{0.8413} \simeq 0.0271\,.$$

4. L'area di T è $\frac{1}{2}$; pertanto $f(x,y) = 2$, per $(x,y)\in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, osservando che la retta passante per i punti $(1,2),(2,1)$ ha equazione $x+y=3$, segue
$$f_1(x) = \int_{3-x}^{2} 2dy = 2x-2\,,\ x\in[1,2]\,;\quad f_2(y) = \int_{3-y}^{2} 2dx = 2y-2\,,\ y\in[1,2]\,,$$

con $f_1(x) = f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto: $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$; ovvero X e Y non sono stocasticamente indipendenti. Inoltre

$$\alpha = P(X \leq \frac{3}{2} \,|\, Y \geq \frac{3}{2}) = \frac{P(X \leq \frac{3}{2},\, Y \geq \frac{3}{2})}{P(Y \geq \frac{3}{2})} = \frac{\int_1^{\frac{3}{2}} dx \int_{3-x}^{2} 2dy}{\int_{\frac{3}{2}}^{2}(2y-2)dy} = \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\,.$$

In termini geometrici: considerando il triangolo A di vertici i punti $(1,2), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, 2)$, che rappresenta l'evento $(X \leq \frac{3}{2},\, Y \geq \frac{3}{2})$, e il trapezio B di vertici i punti $(1,2), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (2, \frac{3}{2}), (2,2)$, che rappresenta l'evento $(Y \geq \frac{3}{2})$, essendo la distribuzione uniforme basta osservare che l'area di A è $\frac{1}{3}$ dell'area di B.

5. Ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione normale, di parametri m, σ, è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, segue

$$\varphi_U(t) = \mathbb{P}(e^{itU}) = \mathbb{P}(e^{it(Y+Z)}) = \mathbb{P}(e^{it(X+1)}) = e^{it}\mathbb{P}(e^{itX}) = e^{it}\varphi_X(t) = e^{it}e^{it-2t^2} = e^{2it-2t^2}\,.$$

Inoltre $V = \frac{U-2}{2} = \frac{X-1}{2} = \frac{X-m_X}{\sigma_X}$ (numero aleatorio ridotto); pertanto: $m_V = 0, \sigma_V = 1$ (V ha una distribuzione normale standard).

6. Si ha

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ae^{-x-3y}dxdy = a\int_0^{+\infty}(e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-3y}dy)dx = \frac{a}{3}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \frac{a}{3} = 1\,;$$

pertanto: $a = 3$. Inoltre, fissato $z > 0$, si ha

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X+Y \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 3e^{-x-3y}dy = \int_0^z e^{-x}(1-e^{-3(z-x)})dx =$$

$$= \int_0^z e^{-x}dx - e^{-3z}\int_0^z e^{2x}dx = 1 - e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-3z}(e^{2z}-1) = 1 - \frac{3}{2}e^{-z} + \frac{1}{2}e^{-3z}\,;$$

allora: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = \frac{3}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-3z}$; $f_Z(z) = \frac{3}{2}e^{-z} - \frac{3}{2}e^{-3z}$.
Pertanto: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{\frac{3}{2}e^{-z} - \frac{3}{2}e^{-3z}}{\frac{3}{2}e^{-z} - \frac{1}{2}e^{-3z}} = \frac{3e^{2z}-3}{3e^{2z}-1}$.

7. Gli eventi E_1, E_2, E_3, sia subordinatamente all'evento $(X = 1)$ che all'evento $(X = 2)$ sono equiprobabili, con $P(E_1|X=1) = P(E_2|X=1) = P(E_3|X=1) = \frac{1}{3}$, e con $P(E_1|X=2) = P(E_2|X=2) = P(E_3|X=2) = \frac{2}{3}$. Allora, E_1, E_2, E_3 sono equiprobabili; in particolare, ricordando che $P(X=1) = P(X=2) = \frac{1}{2}$, si ha

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre

$$P(E_1E_2|X=1) = P(E_1E_3|X=1) = P(E_2E_3|X=1) = 0\,,$$

$$P(E_1E_2|X=2) = P(E_1E_3|X=2) = P(E_2E_3|X=2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,$$

da cui segue: $P(E_1E_2) = P(E_1E_3) = P(E_2E_3) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; pertanto, gli eventi E_1, E_2, E_3 sono scambiabili.