Probabilità e Statistica (15/1/2015)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(5-6 crediti: con 5 esercizi risolti correttamente si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un lotto di 10 componenti dello stesso tipo, contenente 6 pezzi buoni e 4 difettosi, si effettuano 5 estrazioni con restituzione. Indicando con X il numero aleatorio di volte in cui il pezzo estratto è buono, calcolare $\alpha = P(X = 3)$ e $\beta = P(m - \sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$, dove m e σ sono la previsione e lo scarto quadratico medio di X.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

2. Un'apparecchiatura produce pezzi di lunghezza aleatoria (in cm) X, con distribuzione di probabilità normale, con $\sigma = 2$. Valutando che circa il 15.87% dei pezzi ha una lunghezza di almeno 50 cm, calcolare la lunghezza media m dei pezzi prodotti dall'apparecchiatura. Inoltre, il singolo pezzo è scartato se supera di 2σ la lunghezza media; qual'è la probabilità p di tale evento? (*Nota:* $\Phi(1) \simeq 0.8413$; $\Phi(2) \simeq 0.9772$).

   $m =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Data una costante positiva c, stabilire per quale valore di c la funzione $f(x) = 0$ per $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{c}$, per $x \in [0, c]$, $f(x) = \frac{c}{2x^2}$, per $x > c$, è una densità di probabilità. Determinare inoltre per ogni $x > 0$ la funzione $S(x) = P(X > x)$ e la probabilità $p = P(\frac{1}{3} < X < 3)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

4. I tempi aleatori impiegati da due veicoli per percorrere un tratto di strada sono rispettivamente X e Y. La densità congiunta del vettore (X, Y) è $f(x, y) = 4ax + (1 - a)y$, per $(x, y) \in (0, 1] \times (0, 1]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a; inoltre, posto $A = (X > Y), B = (X + Y > 1)$, stabilire se $P(A|B) = P(A^c|B)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $P(A|B) = P(A^c|B)$?

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = ae^{-x-y}$, per $x \geq 0$ e $0 \leq y \leq 3x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la funzione di rischio $h_2(y)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $h_2(y) =$

6. Tizio effettua 2 estrazioni senza restituzione da un'urna contenente 1 pallina bianca e 2 nere, mentre Caio effettua 2 estrazioni senza restituzione da un'urna contenente 2 palline bianche e 1 nera. Siano X e Y i numeri aleatori di palline bianche ottenuti da Tizio e Caio. Posto $Z = X + Y$, calcolare la varianza di Z, la probabilità $p_z = P(Z = z)$, per ogni possibile valore z, e la funzione caratteristica di Z.

   $Var(Z) =$ $\qquad\qquad$ $z :$
 $p_z :$ $\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un parametro aleatorio Θ è $\beta(\theta) = \frac{1}{24}\theta^4 e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_{10})$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione esponenziale di parametro θ. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, \ldots, x_{10})$, con $x_1 + \cdots + x_{10} = \tau$, calcolare la previsione m_{10} e lo scarto quadratico medio σ_{10} di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_{10} =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_{10} =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 15/1/2015.

1. Si ha $X \sim B(n,p)$, con $n = 5, p = \frac{3}{5}$, $X \in \{0,1,2,3,4,5\}$; pertanto $\alpha = P(X=3) = \binom{5}{3}(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2 = \frac{216}{625} = 0.3456$; $\quad m = \mathbb{P}(X) = np = 5 \cdot \frac{3}{5} = 3$; $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \simeq 1.1$. Allora: $m - \sigma \simeq 1.9$, $m + 2\sigma \simeq 5.2$; pertanto, posto $P(X = h) = p_h$, si ha: $\beta = P(X \in \{2,3,4,5\}) = 1 - p_0 - p_1$, con $p_0 = (\frac{2}{5})^5 = 0.01024$, $p_1 = \binom{5}{1}(\frac{3}{5})(\frac{2}{5})^4 = 0.0768$; quindi: $\beta = 1 - 0.01024 - 0.0768 = 0.91296$.

2. Per ipotesi $X \sim N_{m,2}$, con $P(X \geq 50) = 0,1587$. Considerando il n.a. standardizzato $Z = \frac{X-m}{2}$, si ha $Z \sim N_{0,1}$; allora
$$P(X \geq 50) = P\left(\frac{X-m}{2} \geq \frac{50-m}{2}\right) = P\left(Z \geq \frac{50-m}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{50-m}{2}\right) \simeq 0,1587\,;$$
ovvero: $\Phi\left(\frac{50-m}{2}\right) \simeq 0,8413$; quindi (in termini approssimati) $\frac{50-m}{2} = 1$, da cui segue $m = 48$. Inoltre, $m + 2\sigma = 52$; pertanto
$$p = P(X \geq 52) = P\left(Z \geq \frac{52-m}{\sigma}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \Phi(2) \simeq 0,0228\,;$$
ovvero, circa il 2.28% dei pezzi viene scartato.

3. Dev'essere $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, ovvero: $\int_0^c \frac{x}{c}\,dx + \int_c^{+\infty} \frac{c}{2x^2}\,dx = \cdots = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} = 1$; pertanto $c = 1$. Inoltre, per $x \geq 1$ si ha $S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,dt = \frac{1}{2x}$.
Per $x \in (0,1)$ si ha
$$S(x) = \int_x^1 t\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}\,dt = \cdots = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$
Infine
$$p = P(\frac{1}{3} < X < 3) = \int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)\,dx = F(3) - F\left(\frac{1}{3}\right) = (1 - S(3)) - \left(1 - S\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \cdots = \frac{7}{9}\,.$$

4. Si ha
$$\int_0^1 dx \int_0^1 [4ax + (1-a)y]dy = \int_0^1 \left[4ax + \frac{(1-a)}{2}\right] dx = 2a + \frac{1-a}{2} = 1\,,$$
da cui segue: $a = \frac{1}{3}$. Inoltre $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, con
$$P(AB) = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y\right) dy = \cdots = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^1 (8x^2 - 2x - 1)dx = \frac{13}{36}\,,$$
$$P(B) = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 \left(\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}y\right) dy = \cdots = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) dx = \frac{2}{3}\,.$$
Quindi $P(A|B) = \frac{\frac{13}{36}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{24}$, da cui segue $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = \frac{11}{24}$. Pertanto $A|B$ e $A^c|B$ non sono equiprobabili.

5. Si ha $\int_0^{+\infty} dx \int_0^{3x} ae^{-x-y}dy = a\int_0^{+\infty} e^{-x}(1-e^{-3x})dx = a - \frac{a}{4} = 1$; pertanto; $a = \frac{4}{3}$. Inoltre, fissato $y \geq 0$, risulta

$$f_2(y) = \int_{\frac{y}{3}}^{+\infty} \frac{4}{3}\, e^{-x-y}dx = \frac{4}{3}\, e^{-y}[-e^{-x}]_{\frac{y}{3}}^{+\infty} = \frac{4}{3}\, e^{-\frac{4}{3}\, y}\,;$$

ovvero Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\frac{4}{3}$. Allora, fissato $y \geq 0$, risulta

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} \frac{4}{3}\, e^{-\frac{4}{3}\, t}dt = e^{-\frac{4}{3}\, y}\,; \quad h_2(y) = \frac{\frac{4}{3}\, e^{-\frac{4}{3}\, y}}{e^{-\frac{4}{3}\, y}} = \frac{4}{3}\,.$$

6. Si ha $X \sim H(3, 2, \frac{1}{3})$, $Y \sim H(3, 2, \frac{2}{3})$, con X e Y stocasticamente indipendenti e con

$$Var(X) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{2}{9} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}) = Var(Y)\,.$$

Pertanto: $Var(Z) = Var(X) + Var(Y) = \frac{4}{9}$. Inoltre: $X \in \{0, 1\}$, $Y \in \{1, 2\}$, $Z \in \{1, 2, 3\}$, con $P(X = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(X = 1) = \frac{2}{3}$; $P(Y = 2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $P(Y = 1) = \frac{2}{3}$. Allora

$$P(Z = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = \frac{2}{9},\ P(Z = 3) = P(X = 1)P(Y = 2) = \frac{2}{9},\ P(Z = 2) = \frac{5}{9}.$$

Infine: $\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \sum_{h=1}^{3} p_z e^{itz} = \frac{2}{9}e^{it} + \frac{5}{9}e^{2it} + \frac{2}{9}e^{3it}$.

(*In alternativa:* $\varphi_X(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{it}$, $\varphi_Y(t) = \frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}e^{2it}$, $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \cdots$)

7. Si ha $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $i = 1, \ldots, 10$; allora, per la funzione di verosimiglianza, si ottiene $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta e^{-\theta x_1} \cdots \theta e^{-\theta x_{10}} = \theta^{10} e^{-\tau\theta}$. Pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\frac{1}{24}\theta^4 e^{-\theta}\theta^{10}e^{-\tau\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^{14}e^{-(\tau+1)\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$

ovvero $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{c_{10},\lambda_{10}}(\theta) = G_{15,\tau+1}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda_{10}^{c_{10}}}{\Gamma(c_{10})} = \frac{(\tau+1)^{15}}{14!}$. Allora

$$m_{10} = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c_{10}}{\lambda_{10}} = \frac{15}{\tau+1}\,, \quad \sigma_{10} = \sqrt{\frac{c_{10}}{\lambda_{10}^2}} = \frac{\sqrt{15}}{\tau+1}\,.$$