Probabilità e Statistica (12/02/2015)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(5-6 crediti: con 5 esercizi risolti correttamente si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U, contenente 3 palline bianche, e V, contenente 2 palline bianche e 1 nera, da V si prendono a caso 2 palline che vengono inserite in U. Successivamente da U si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $H =$ *"le 2 palline inserite in U sono entrambe bianche"*, $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta da U è bianca"*, $i = 1, 2$, e posto $X = |E_1| + |E_2|$, calcolare: (i) la previsione di X; (i) la previsione di X^2; (iii) la probabilità p dell'evento condizionato $H|(X = 2)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\mathbb{P}(X^2) =$ $p =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [1, 3]$ è $f(x) = 2a$, per $x \in [1, 2]$, $f(x) = a$, per $x \in (2, 3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la costante a; (ii) la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $F(x) =$

3. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(3, 1), (3, 3), (1, 3)$. Calcolare le densità marginali $f_1(x)$, per $x \in [1, 3]$, ed $f_2(y)$, per $y \in [1, 3]$; inoltre, stabilire se X e Y sono incorrelati.

   $f_1(x) =$ $f_2(y) =$ $Cov(X, Y) = 0$?

4. Una persona attende, a partire dall'istante 0, l'arrivo di 3 amici, ognuno dei quali si presenta a caso nell'intervallo $[0, 3]$. Sia T il tempo aleatorio di attesa fino all'arrivo dei tre amici. Assumendo che i tempi aleatori di arrivo, X_1, X_2, X_3, dei tre amici siano indipendenti, calcolare: (i) la probabilità $\alpha = P(T > 2)$; (ii) la previsione di T.

   $\alpha =$ $\mathbb{P}(T) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y), con $X \geq 0, Y \geq 0$, è $f(x, y) = ke^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e, per ogni $y > 0$, la funzione di rischio di Y.

   $k =$ $h_2(y) =$

6. La funzione caratteristica di $X_1, \ldots, X_5$, indipendenti e ugualmente distribuiti, è $\varphi(t) = e^{-it-\frac{5}{2}t^2}$. Posto $Z = \frac{X_1+\cdots+X_5}{5}$, calcolare $\varphi_Z(t)$ e $p = P[(-2 \leq Z \leq 1) \,|\, (-3 \leq Z \leq 0)]$.

   $\varphi_Z(t) =$ $p =$

7. Da un'urna U, contenente 2 palline bianche e 2 nere, si effettuano 4 estrazioni senza restituzione. Tizio vince un premio se almeno una delle prime 2 palline estratte è bianca; Caio vince un premio se almeno una delle ultime 2 palline estratte è bianca. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che Tizio e Caio vincano entrambi il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno tra Tizio e Caio non vinca il premio; (iii) la probabilità condizionata $\gamma = P(E_1 \,|\, E_2 \vee E_4)$.

   $p =$ $\alpha =$ $\gamma =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 12/02/2015.

1. Si ha: $P(H) = \frac{\binom{1}{0}\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} = \frac{1}{3}$, $P(H^c) = \frac{2}{3}$; inoltre: $X \in \{1,2\}$, con $P(X = 1|H) = 0$, $P(X = 2|H) = P(E_1E_2|H) = 1$, $P(X = 2|H^c) = P(E_1E_2|H^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$, $P(X = 1|H^c) = 1 - P(X = 2|H^c) = \frac{2}{5}$; pertanto: $P(X = 1) = P(X = 1|H)P(H) + P(X = 1|H^c)P(H^c) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, $P(X = 2) = 1 - P(X = 1) = \frac{11}{15}$. Allora

$$\mathbb{P}(X) = 1 \cdot \frac{4}{15} + 2 \cdot \frac{11}{15} = \frac{26}{15}, \quad \mathbb{P}(X^2) = 1^2 \cdot \frac{4}{15} + 2^2 \cdot \frac{11}{15} = \frac{48}{15}.$$

   Inoltre: $P(H|X = 2) = \frac{P(X=2|H)P(H)}{P(X=2)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{11}{15}} = \frac{5}{11} > \frac{1}{3} = P(H)$.
   (*gli eventi H ed $(X = 2)$ sono correlati positivamente*).

2. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$; ovvero $\int_1^2 2a\,dx + \int_2^3 a\,dx = 2a + a = 3a = 1$; pertanto $a = \frac{1}{3}$. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, per $x \leq 1$ si ha: $F(x) = 0$; per $x \in (1, 2]$ si ha: $F(x) = \int_1^x \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3}(x-1)$; per $x \in (2, 3)$ si ha: $F(x) = \int_1^2 \frac{2}{3}dt + \int_2^x \frac{1}{3}dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(x-2) = \frac{x}{3}$; per $x \geq 3$ si ha $F(x) = 1$.

3. L'area di T è $\mu(T) = 2$; pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. La retta passante per i punti $(3,1), (1,3)$ ha equazione: $x + y = 4$; allora, fissato $x \in [1,3]$, si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{4-x}^{3} \frac{1}{2}dy = \frac{x-1}{2},$$

   con $f_1(x) = 0$ altrove; analogamente $f_2(y) = \int_{4-y}^{3} \frac{1}{2}dx = \frac{y-1}{2}$, $y \in [1,3]$, con $f_2(y) = 0$ altrove; pertanto X e Y sono ugualmente distribuiti, con

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \int_1^3 x \cdot \frac{x-1}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \cdots = \frac{7}{3},$$

$$\mathbb{P}(XY) = \int_1^3 \int_{4-x}^{3} \frac{1}{2}xy\,dxdy = \frac{1}{4}\int_1^3 x[y^2]_{4-x}^3 dx = \cdots = \frac{1}{4}\int_1^3 (-x^3+8x^2-7x)dx = \cdots = \frac{16}{3}.$$

   Allora: $Cov(X,Y) = \frac{16}{3} - \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{3} = -\frac{1}{9} < 0$; pertanto X e Y sono correlati negativamente.

4. X_1, X_2, X_3 hanno una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0,3]$; allora, posto $(X_i > 2) = E_i$, si ha $P(E_i) = \frac{1}{3}$, $P(E_i^c) = P(X_i \leq 2) = \frac{2}{3}, i = 1,2,3$. Pertanto, sfruttando l'indipendenza stocastica e le formule di De Morgan, si ottiene

$$\alpha = P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = 1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 1 - P(E_1^c)P(E_2^c)P(E_3^c) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}.$$

Inoltre, fissato $t \in [0,3]$ e indicando con A_i l'evento $(X_i \leq t)$, si ha $P(A_i) = \frac{t}{3}$, $i = 1,2,3$; allora

$$P(T \leq t) = F_T(t) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{t^3}{27}\,, \quad f_T(t) = F_T'(t) = \frac{t^2}{9}\,.$$

Pertanto: $\mathbb{P}(T) = \int_0^3 t f_T(t)dt = \int_0^3 \frac{t^3}{9}dt = \left[\frac{t^4}{36}\right]_0^3 = \frac{9}{4}$.

5. Si ha

$$\int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} k e^{-x-y} dy = k \int_0^{+\infty} (e^{-x} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy) dx = k \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{k}{2} = 1\,;$$

pertanto: $k = 2$. Inoltre, per ogni $y > 0$, si ha

$$f_2(y) = \int_0^y 2e^{-x-y} dx = 2e^{-y} \int_0^y e^{-x} dx = 2e^{-y}(1 - e^{-y}) = 2e^{-y} - 2e^{-2y}\,,$$

e, ricordando che $\int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda y}$, segue

$$S_2(y) = P(Y > y) = \int_y^{+\infty} f_2(t)dt = \int_y^{+\infty} (2e^{-t} - 2e^{-2t})dt = 2\int_y^{+\infty} e^{-t}dt - \int_y^{+\infty} 2e^{-2t}dt =$$

$= 2e^{-y} - e^{-2y}$. Allora: $h_2(y) = \frac{f_2(y)}{S_2(y)} = \frac{2e^{-y} - 2e^{-2y}}{2e^{-y} - e^{-2y}} = \frac{2e^y - 2}{2e^y - 1} = 1 - \frac{1}{2e^y - 1}\,,\ y > 0\,.$

6. Essendo $X_1, \ldots, X_5$ stocasticamente indipendenti, posto $Y = X_1 + \cdots + X_5$, si ha

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdots \varphi_{X_5}(t) = e^{-5it - \frac{25}{2}t^2}\,,$$

ed essendo $Z = \frac{Y}{5}$ segue: $\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it\frac{Y}{5}}) = \mathbb{P}(e^{i\frac{t}{5}Y}) = \varphi_Y\left(\frac{t}{5}\right) = e^{-it - \frac{t^2}{2}}$; pertanto Z ha una distribuzione normale $N_{-1,1}$. Allora

$$p = P[(-2 \leq Z \leq 1) \,|\, (-3 \leq Z \leq 0)] = \frac{P(-2 \leq Z \leq 1,\, -3 \leq Z \leq 0)}{P(-3 \leq Z \leq 0)} =$$

$$= \frac{P(-2 \leq Z \leq 0)}{P((-3 \leq Z \leq 0)} = \frac{\Phi(1) - \Phi(-1)}{\Phi(1) - \Phi(-2)} = \frac{2\Phi(1) - 1}{\Phi(1) + \Phi(2) - 1} \simeq \frac{0.6826}{0.8413 + 0.9772 - 1} \simeq 0.834\,.$$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_4$ sono scambiabili con $P(E_i) = \frac{1}{2}$ e con $P(E_i E_j) = P(E_1 E_2) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Si ha $A = E_1 \vee E_2$, $B = E_3 \vee E_4$, con

$$p = P(AB) = P[(E_1 \vee E_2) \wedge (E_3 \vee E_4)] = P(E_1E_3 \vee E_1E_4 \vee E_2E_3 \vee E_2E_4)\,.$$

Poichè gli eventi $E_1E_3, E_1E_4, E_2E_3, E_2E_4$ sono a due a due incompatibili segue

$$p = P(E_1E_3) + P(E_1E_4) + P(E_2E_3) + P(E_2E_4) = 4P(E_1E_2) = 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre: $P(A) = P(B) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; pertanto, ricordando le formule di De Morgan, segue: $\alpha = P(A^c \vee B^c) = 1 - P(AB) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Infine

$$\gamma = P(E_1 \,|\, E_2 \vee E_4) = \frac{P(E_1E_2 \vee E_1E_4)}{P(E_2 \vee E_4)} = \frac{P(E_1E_2) + P(E_1E_4)}{P(E_2) + P(E_4) - P(E_2E_4)} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = \frac{2}{5}\,.$$