Probabilità e Statistica (10/04/2015)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(5-6 crediti: con 5 esercizi risolti correttamente si ottiene il punteggio massimo)

1. Dati due n. a. X e Y, incorrelati e con distribuzione binomiale di parametri $n = 9, p = \frac{1}{3}$, posto $U = 3X + 2Y$, $V = 2X - 3Y$, calcolare le varianze di U e V e il loro coefficiente di correlazione ρ.

   $Var(U) =$ $\qquad\qquad$ $Var(V) =$ $\qquad\qquad$ $\rho =$

2. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul triangolo di vertici i punti $(0,0), (4,0), (4,2)$. Calcolare: (i) la mediana M di X, ovvero il valore M tale che $P(X \leq M) = P(X \geq M)$; (ii) la densità $f_2(y)$; (iii) la funzione di ripartizione $F_2(y)$.

   $M =$ $\qquad\qquad$ $f_2(y) =$ $\qquad\qquad$ $F_2(y) =$

3. Con riferimento all'esercizio 2, posto $Z = X - 2Y$, determinare la densità di probabilità di Z e il valore della costante c tale che $P(Z \geq c) = P(Z \leq c)$.

   $f_(z) =$ $\qquad\qquad$ $c =$

4. Da un'urna, contenente 4 palline, di cui due numerate con il numero 0, una con il numero 1 e una con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con X il risultato della prima estrazione e con Y il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X+Y$. Calcolare: (i) $p = P(Z > 0)$; (ii) $\alpha = P(X = 0 \,|\, Z \geq 2)$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

5. Con riferimento all'esercizio 4, calcolare le funzioni caratteristiche del n.a. Z e del n.a. $U = 2Z + 1$.

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $\varphi_U(t) =$

6. Dati tre eventi scambiabili E_1, E_2, E_3, con $P(E_1) = \frac{2}{3}, P(E_1^c E_2^c) = \frac{1}{15}, P(E_1 E_2 E_3) = \frac{1}{5}$, calcolare $P(E_1 \,|\, E_2^c)$ e $P(E_1 \vee E_2^c \,|\, E_2 E_3^c)$.

   $P(E_1 \,|\, E_2^c) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_1 \vee E_2^c \,|\, E_2 E_3^c) =$

7. La densità di probabilità di un n.a. continuo non negativo X è $f(x) = (1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})\, e^{-\lambda(x+\sqrt{x})}$, per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante λ e, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$.

   $\lambda =$ $\qquad\qquad$ $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 10/04/2015.

1. Si ha $Var(X) = Var(Y) = npq = 2, Cov(X,Y) = 0$; quindi

$$Var(U) = 9Var(X) + 4Var(Y) = 4Var(X) + 9Var(Y) = Var(V) = 26\,.$$

Inoltre, osservando che $Cov(aX, bY) = abCov(X,Y)$, segue

$$Cov(U,V) = Cov(3X+2Y, 2X-3Y) = Cov(3X,2X)+Cov(3X,-3Y)+Cov(2Y,2X)+Cov(2Y,-3Y) =$$

$= 6Cov(X,X) - 6Cov(Y,Y) = 6Var(X) - 6Var(Y) = 0$. Quindi: $\rho = 0$.

2. L'area del triangolo T è 4, pertanto $f(x,y) = \frac{1}{4}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Osservando che la retta passante per i punti $(0,0),(4,2)$ ha equazione $y = \frac{x}{2}$, si ha

$$f_1(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{4}dy = \frac{x}{8}\,,\ 0 \le x \le 4\,;\ \int_0^M f_1(x)dx = \left[\frac{x^2}{16}\right]_0^M = \frac{M^2}{16} = \frac{1}{2}\,;$$

pertanto: $M = 2\sqrt{2}$. Inoltre: $f_2(y) = \int_{2y}^4 \frac{1}{4}dx = \frac{2-y}{2}$, $0 \le y \le 2$, con $f_2(y) = 0$ altrove. Infine: $F_2(y) = 0$, per $y \le 0$; $F_2(y) = 1$, per $y \ge 2$; per $y \in (0,2)$ si ha $F_2(y) = \int_0^y f_2(t)dt = \int_0^y \frac{2-t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^y = y - \frac{y^2}{4}$.

3. Ricordiamo che l'equazione della retta passante per i punti $(0,0),(4,2)$ è $y = \frac{x}{2}$, ovvero $x - 2y = 0$; sui punti di tale retta si ha $Z = 0$. Inoltre, sui punti della retta di equazione $x - 2y = k$, parallela alla retta di equazione $x - 2y = 0$, si ha $Z = k$. La retta di equazione $x - 2y = k$ passa per il punto $(4,0)$ se $k = 4$; pertanto $Z \in [0,4]$. Fissato $z \in (0,4)$, l'area del triangolo T_z di vertici i punti $(z,0),(4,0),(4,\frac{4-z}{2})$ è $\mu(T_z) = \frac{(4-z)^2}{4}$; pertanto
$P(Z \ge z) = P(X-2Y \ge z) = P\left(Y \le \frac{X-z}{2}\right) = \int\int_{T_z} f(x,y)dxdy = \frac{\mu(T_z)}{\mu(T)} = \frac{\frac{(4-z)^2}{4}}{4} = \frac{(4-z)^2}{16}$;
Allora: $F(z) = P(Z \le z) = 1 - \frac{(4-z)^2}{16}$, per $z \in [0,4]$, da cui segue: $f(z) = F'(z) = \frac{4-z}{8}$, per $z \in [0,4]$, con $f(z) = 0$ altrove. Infine $P(Z \ge c) = \frac{(4-c)^2}{16} = 1 - \frac{(4-c)^2}{16} = P(Z \le c)$ se e solo se $\frac{(4-c)^2}{16} = \frac{1}{2}$, da cui segue: $c = 4 - 2\sqrt{2}$. *(Nota: c è la mediana di Z)*

4. Si ha: $P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0 \,|\, X = 0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, da cui segue: $p = P(Z > 0) = 1 - P(Z = 0) = \frac{5}{6}$. Inoltre $(Z \ge 2) = (Z = 2) \vee (Z = 3)$, con

$$(Z = 2) = (X = 0, Y = 2) \vee (X = 2, Y = 0)\,,\ \ (Z = 3) = (X = 1, Y = 2) \vee (X = 2, Y = 1)\,,$$

e con: $P(Z = 2) = P(X = 0, Y = 2) + P(X = 2, Y = 0) = \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\,.$$

Infine: $(X=0)\wedge(Z\geq 2)=(X=0,Z=2)=(X=0,Y=2)$; pertanto

$$\alpha=P(X=0\,|\,Z\geq 2)=\frac{P(X=0,\,Z\geq 2)}{P(Z\geq 2)}=\frac{P(X=0,Y=2)}{P(Z=2)+P(Z=3)}=\frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{1}{3}\,.$$

5. Si ha $Z\in\{0,1,2,3\}$, con

$$P(Z=0)=\frac{1}{6},\;\;P(Z=2)=\frac{1}{3},\;\;P(Z=3)=\frac{1}{6},\;\;P(Z=1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3};$$

pertanto: $\varphi_Z(t)=I\!\!P(e^{itZ})=\sum_h p_h e^{itz_h}=\frac{1+2e^{it}+2e^{2it}+e^{3it}}{6}$. Inoltre

$$\varphi_U(t)=I\!\!P(e^{itU})=I\!\!P(e^{it(2Z+1)})=e^{it}I\!\!P(e^{i(2t)Z})=e^{it}\varphi_Z(2t)=\frac{e^{it}+2e^{3it}+2e^{5it}+e^{7it}}{6}\,.$$

In alternativa: $U\in\{1,3,5,7\}$, con

$$P(U=1)=P(Z=0)\,,\;P(U=3)=P(Z=1)\,,\;P(U=5)=P(Z=2)\,,\;P(U=7)=P(Z=3)\,;$$

pertanto: $\varphi_U(t)=\sum_h p_h e^{ith}=\cdots=\frac{e^{it}+2e^{3it}+2e^{5it}+e^{7it}}{6}$.

6. Dall'ipotesi di scambiabilità segue $P(E_2^c)=P(E_1^c)=\frac{1}{3}$; allora, osservando che $P(E_1E_2^c)=P(E_2^c)-P(E_1^cE_2^c)$, si ottiene

$$P(E_1\,|\,E_2^c)=\frac{P(E_1E_2^c)}{P(E_2^c)}=\frac{P(E_2^c)-P(E_1^cE_2^c)}{P(E_2^c)}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{5}\,.$$

Inoltre, osservando che $P(E_3^c)=P(E_1^c)=\frac{1}{3}$, $P(E_2^cE_3^c)=P(E_1^cE_2^c)=\frac{1}{15}$, e che

$$P(E_1E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1\vee E_2)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_1^cE_2^c)-1=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{15}-1=\frac{2}{5},$$

segue

$$P(E_1\vee E_2^c\,|\,E_2E_3^c)=P(E_1\,|\,E_2E_3^c)=\frac{P(E_1E_2E_3^c)}{P(E_2E_3^c)}=\frac{P(E_1E_2)-P(E_1E_2E_3)}{P(E_3^c)-P(E_2^cE_3^c)}=\frac{\frac{2}{5}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{15}}=\frac{3}{4}\,.$$

7. Posto $t=x+\sqrt{x}$, si ha $dt=\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$; allora

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-\lambda(x+\sqrt{x})}dx=\int_0^{+\infty}e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}=1\,;$$

pertanto: $\lambda=1$. Inoltre, fissato $x>0$, si ha:

$S(x)=\int_x^{+\infty}f(t)dt=\int_x^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)e^{-t-\sqrt{t}}dt=[-e^{-t-\sqrt{t}}]_x^{+\infty}=e^{-x-\sqrt{x}}$;

$h(x)=\frac{f(x)}{S(x)}=\frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{-x-\sqrt{x}}}{e^{-x-\sqrt{x}}}=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.