**Probabilità e Statistica** (9/6/2015)

*(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)*
*(5-6 crediti: con 5 esercizi risolti correttamente si ottiene il punteggio massimo)*

1. Da un lotto, contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Definiti gli eventi $E_i$ = "l'i-mo pezzo estratto è buono", $i = 1, 2$, calcolare la probabilità condizionata $\beta = P(E_1 E_2^c \,|\, E_1 \vee E_2^c)$. Posto inoltre $X = |E_1| + |E_2|$ e indicando con $m$ e $\sigma$ la previsione e lo scarto quadratico medio di $X$, calcolare la probabilità $\gamma = P(m - \sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$.

   $\beta =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $U = 2|E_1| + |E_2|$ , $V = |E_1| + 2|E_2|$, calcolare la varianza del numero aleatorio $U - V$ e la covarianza di $U, V$.

   $Var(U - V) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $Cov(U, V) =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è $f(x, y) = k(x - y)$, per $(x, y) \in Q = [2, 4] \times [0, 2]$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $k$ e la mediana $M$ del numero aleatorio $Y$; inoltre, stabilire se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad\qquad$ $M =$ $\qquad\qquad$ *stoc. indip.?*

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-5)^2+(y-3)^2}{2}}$. Calcolare la probabilità condizionata $p = P[(X \leq 6, Y \leq 4) \,|\, (5 \leq X \leq 7, 3 \leq Y \leq 5)]$ e lo scarto quadratico medio $\sigma_Z$ del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\sigma_Z =$

5. Sia dato un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$, con densità congiunta $f(x, y) = 2e^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S_1(x)$ e la funzione di rischio $h_1(x)$. Fissati inoltre $x > 0, x_0 > 0$, stabilire se vale $P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) = P(X > x)$.

   $S_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $h_1(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > x + x_0 \,|\, X > x_0) = P(X > x)$ ?

6. Con riferimento all'esercizio 4, calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z$. *(N.B.: (i) per una distribuzione normale standard si ha* $\varphi(t) = \varphi(-t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$*; (ii) se* $X \sim N_{m,\sigma}$*, allora* $X$ *si può rappresentare come* $X = \sigma X_{0,1} + m$*, dove* $X_{0,1} \sim N_{0,1}$*)*

   $\varphi_Z(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio $\Theta$ è normale con parametri $m_0 = 2$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \cdots, X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore $\theta$ di $\Theta$, hanno una distribuzione normale con valor medio $\theta$ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{3}$. Considerato un campione osservato $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = 2n$, siano $m_n$ e $\sigma_n$ la previsione e lo scarto quadratico medio di $\Theta|\mathbf{x}$. Calcolare la probabilità $p = P[(2 - 2\sigma_n \leq \Theta \leq 2 + 2\sigma_n)|\mathbf{x}]$ e stabilire per quali valori di $n$ l'ampiezza $l$ dell'intervallo $[m_n - 2\sigma_n, m_n + 2\sigma_n]$ è minore di $\frac{2}{5}$.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $n \in$

**Probabilità e Statistica I** (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

*Soluzioni della prova scritta del 9/6/2015.*

1. Si ha $P(E_i) = \frac{2}{3}$, $P(E_i^c) = \frac{1}{3}, i = 1, 2$, $P(E_1 E_2^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$; allora, osservando che $E_1 E_2^c \Rightarrow E_1 \vee E_2^c$ e quindi $(E_1 E_2^c) \wedge (E_1 \vee E_2^c) = E_1 E_2^c$, segue

$$\beta = \frac{P[(E_1 E_2^c) \wedge (E_1 \vee E_2^c)]}{P(E_1 \vee E_2^c)} = \frac{P(E_1 E_2^c)}{P(E_1 \vee E_2^c)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}\,.$$

Inoltre $X \in \{1, 2\}$, con $X \sim H(3, 2, \frac{2}{3})$; quindi $\mathbb{P}(X) = np = \frac{4}{3}$, $\sigma = \sqrt{npq(1 - \frac{n-1}{N-1})} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, da cui segue: $m - \sigma = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$, $\quad m + 2\sigma = \frac{4}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} > 2$. Allora l'evento $(m - \sigma \leq X \leq m + 2\sigma)$ coincide con l'evento $X \in \{1, 2\}$, ovvero l'evento certo; quindi $\gamma = P(m - \sigma \leq X \leq m + 2\sigma) = P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.

2. Osserviamo che $U - V = \cdots = |E_1| - |E_2|$, con $P(E_1) = P(E_2) = \frac{2}{3}$, $P(E_1 E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$, $Cov(|E_1|, |E_2|) = P(E_1 E_2) - P(E_1)P(E_2) = -\frac{1}{9}$, $Var(|E_1|) = Var(|E_2|) = \frac{2}{9}$; allora

$$Var(U - V) = Var(|E_1| - |E_2|) = Var(|E_1|) + Var(|E_2|) - 2Cov(|E_1|, |E_2|) = \frac{2}{3}\,.$$

Inoltre: $Cov(U, V) = Cov(2|E_1| + |E_2|, |E_1| + 2|E_2|) =$

$$= 2Cov(|E_1|, |E_1|) + 4Cov(|E_1|, |E_2|) + Cov(|E_2|, |E_1|) + 2Cov(|E_2|, |E_2|) =$$

$$= 2Var(|E_1|) + 5Cov(|E_1|, |E_2|) + 2Var(|E_2|) = \cdots = \frac{1}{3}\,.$$

3. Si ha:

$$k \int_2^4 dx \int_0^2 (x - y)dy = \cdots = k \int_2^4 (2x - 2)dx = \cdots = 8k = 1\,;$$

pertanto: $k = \frac{1}{8}$. Inoltre

$$f_2(y) = \frac{1}{8} \int_2^4 (x - y)dx = \cdots = \frac{3 - y}{4}\,,\ 0 \leq y \leq 2\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Allora

$$\int_0^M \frac{3 - y}{4}\, dy = \frac{6M - M^2}{8} = \frac{1}{2}\,,\ \ 0 < M < 2\,;$$

ovvero: $M^2 - 6M + 4 = 0$, $0 < M < 2$, da cui segue: $M = 3 - \sqrt{5}$. Infine

$$f_1(x) = \frac{1}{8} \int_0^2 (x - y)dy = \cdots = \frac{x - 1}{4}\,,\ 2 \leq x \leq 4\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Osservando che $f(x, y) \neq f_1(x) f_2(y)$, segue che $X$ e $Y$ non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha: $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-3)^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}$; in modo analogo: $f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-3)^2}{2}}$, con $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$; pertanto $X \sim N_{5,1}(x), Y \sim N_{3,1}(y)$, con $X, Y$ stocasticamente indipendenti. Allora, osservando che $\Phi(0) = 0.5\,,\ \Phi(1) \simeq 0.8413\,,\ \Phi(2) \simeq 0.9772$, segue

$$p = P[(X \leq 6, Y \leq 4)\,|\,(5 \leq X \leq 7, 3 \leq Y \leq 5)] = \frac{P[(X \leq 6, Y \leq 4) \wedge (5 \leq X \leq 7, 3 \leq Y \leq 5)]}{P(5 \leq X \leq 7, 3 \leq Y \leq 5)} =$$

$$= \frac{P(5 \leq X \leq 6, 3 \leq Y \leq 4)}{P(5 \leq X \leq 7, 3 \leq Y \leq 5)} = \frac{P(5 \leq X \leq 6)P(3 \leq Y \leq 4)}{P(5 \leq X \leq 7)P(3 \leq Y \leq 5)} =$$

$$= \frac{[\Phi_{5,1}(6) - \Phi_{5,1}(5)][\Phi_{3,1}(4) - \Phi_{3,1}(3)]}{[\Phi_{5,1}(7) - \Phi_{5,1}(5)][\Phi_{3,1}(5) - \Phi_{3,1}(3)]} = \frac{[\Phi(1) - \Phi(0)]^2}{[\Phi(2) - \Phi(0)]^2} \simeq \frac{(0.8413 - 0.5)^2}{(0.9772 - 0.5)^2} \simeq 0.5116\,.$$

Inoltre, osservando che $\sigma_{XY} = 0$, segue: $\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

5. Per ogni $x \geq 0$, si ha

$$f_1(x) = \int_x^{+\infty} 2e^{-x-y}dy = \cdots = 2e^{-2x}\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove; quindi $X$ ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Allora

$$S_1(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} 2e^{-2t}dt = \cdots = e^{-2x}\,,\ x \geq 0\,;$$

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{S_1(x)} = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}} = 2\,,\ x \geq 0\,.$$

Inoltre, $P(X > x + x_0\,|\,X > x_0) = P(X > x)$ in quanto la distribuzione è esponenziale; infatti

$$P(X > x + x_0\,|\,X > x_0) = \frac{P(X > x + x_0)}{P(X > x_0)} = \frac{S(x + x_0)}{S(x_0)} = \frac{e^{-2x-2x_0}}{e^{-2x_0}} = e^{-2x} = P(X > x)\,.$$

6. Si ha $Z = X + (-Y)$, $\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_{-Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(-t)$, con $X = X_{0,1} + 5$, $Y = Y_{0,1} + 3$; pertanto

$$\varphi_X(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \mathbb{P}(e^{it(X_{0,1}+5)}) = e^{5it}\mathbb{P}(e^{itX_{0,1}}) = e^{5it}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{5it-\frac{t^2}{2}}\,;$$

$$\varphi_Y(-t) = \mathbb{P}(e^{i(-t)Y}) = \mathbb{P}(e^{i(-t)(Y_{0,1}+3)}) = e^{-3it}\mathbb{P}(e^{i(-t)Y_{0,1}}) = e^{-3it}e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-3it-\frac{t^2}{2}}\,;$$

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(-t) = e^{5it-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-3it-\frac{t^2}{2}} = e^{2it-t^2}\,; \qquad (Z \sim N_{2,\sqrt{2}})\,.$$

7. Si ha: $\bar{\mathbf{x}} = m_0 = 2$, $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$, con

$$m_n = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \bar{\mathbf{x}}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = m_0 = 2\,, \qquad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = 1 + 9n\,, \qquad \sigma_n = \frac{1}{\sqrt{1+9n}}\,.$$

Allora, osservando che $\Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$, $\Phi(2) \simeq 0.9772$, segue:
$p = P[(2 - 2\sigma_n \leq \Theta \leq 2 + 2\sigma_n)|\mathbf{x}] = \Phi_{m_n,\sigma_n}(2 + 2\sigma_n) - \Phi_{m_n,\sigma_n}(2 - 2\sigma_n) =$
$= \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544$.
Inoltre, tenendo conto che l'ampiezza dell'intervallo $[m_n - 2\sigma_n, m_n + 2\sigma_n]$ è $l = 4\sigma_n = \frac{4}{\sqrt{1+9n}}$, risulta $l < \frac{2}{5}$ per $n > 11$.