Probabilità e Statistica (7/7/2015)

(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma; 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(5-6 crediti: con 5 esercizi risolti correttamente si ottiene il punteggio massimo)

1. Sia Z il risultato aleatorio del lancio di un dado, con $P(Z = k) = \frac{1}{6}, k = 1, \ldots, 6$. Definiti gli eventi $A = (Z \in \{2,3,4\})$, $B = (Z \in \{3,4\})$, $C = (Z \in \{3,4,5\})$, determinare i costituenti relativi ad A, B, C. Inoltre, calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ del numero aleatorio $X = |A| - 2|B| + |C|$.

   costituenti : $m =$ $\sigma =$

2. Un'urna di composizione incognita contiene 3 palline bianche e 1 nera (ipotesi H), oppure 1 bianca e 3 nere (ipotesi H^c), con $P(H^c) = 9P(H)$. Dall'urna si effettuano estrazioni con restituzione. Definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, stabilire per quali valori di n si ha $P(H^c|E_1 \cdots E_n) < P(H|E_1 \cdots E_n)$; inoltre, posto $\alpha = P(E_{n+1}|E_1 \cdots E_n)$, stabilire per quali valori di n risulta $\alpha > \frac{1}{2}$.

   $n \in$ $n \in$

3. Due veicoli partono insieme da uno stesso punto, con velocità aleatorie (in km/h) rispettive X e $Y = 3X$. Supposto che la distribuzione di probabilità di X sia esponenziale di parametro $\lambda = 1$ e indicando con Z la distanza aleatoria tra i due veicoli dopo un'ora, calcolare: la previsione m di Z, la probabilità p dell'evento condizionato $(Z > 5|Z > 4)$ e il coefficiente di correlazione ρ di X, Y.

   $m =$ $p =$ $\rho =$

4. Un rettangolo R ha dimensioni aleatorie X, Y. La densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = e^{-x-y}$, per $x \geq 0$, $y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare le previsioni μ ed m dell'area A e del perimetro Z di R. Inoltre, calcolare $p = P(Z > 2)$.

   $\mu =$ $m =$ $p =$

5. Siano X e Y due numeri aleatori indipendenti e con funzioni caratteristiche $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \frac{e^{it}}{2-e^{it}}$. Posto $Z = X+Y$, calcolare la funzione caratteristica di Z; inoltre, calcolare la previsione m_Z e la varianza σ_Z^2 di Z.

   $\varphi_Z(t) =$ $m_Z =$ $\sigma_Z^2 =$

6. Un sistema S è formato da due dispositivi a e b in parallelo, funzionanti in contemporanea, con tempi di durata due numeri aleatori X e Y indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Calcolare la previsione μ e la funzione di rischio $h_T(t)$ del tempo di durata aleatoria T di S.

   $\mu =$ $h_T(t) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 3$, $\sigma_0 = 1$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_{10})$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{10})$, con $x_1 + \cdots + x_{10} = 30$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(\frac{25}{9} \leq \Theta \leq \frac{28}{9} \mid \mathbf{x})$. Supposto inoltre, condizionatamente al vettore osservato $\mathbf{x}$, che per il numero aleatorio $Z = a\,\Theta + b$, con $a > 0$, valga $Z \sim N_{0,1}$, calcolare a e b.

   $p =$ $a =$ $b =$

Probabilità e Statistica I (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr. - Elettr., Roma)

Soluzioni della prova scritta del 7/7/2015.

1. I costituenti relativi ad A, B, C sono

$$A^cB^cC^c = (Z \in \{1,6\}),\ ABC = B = (Z \in \{3,4\}),\ AB^cC^c = (Z = 2),\ A^cB^cC = (Z = 5).$$

Si ha $X \in \{0,1\}$, con $P(X=0) = P(ABC \vee A^cB^cC^c) = P(Z \in \{1,3,4,6\}) = \frac{2}{3}$, $P(X=1) = P(AB^cC^c \vee A^cB^cC) = P(Z \in \{2,5\}) = \frac{1}{3}$. Allora X coincide con l'indicatore dell'evento $(Z \in \{2,5\})$; pertanto: $m = P(Z \in \{2,5\}) = \frac{1}{3}$, $\sigma = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

2. Si ha: $P(E_1 \cdots E_n|H) = P(E_1|H)\cdots P(E_n|H) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $P(E_1 \cdots E_n|H^c) = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n$; inoltre $P(H) + P(H^c) = 10P(H) = 1$, da cui segue $P(H) = \frac{1}{10}$, $P(H^c) = \frac{9}{10}$. Allora

$$P(H|E_1 \cdots E_n) = \frac{P(E_1 \cdots E_n|H)P(H)}{P(E_1 \cdots E_n|H)P(H) + P(E_1 \cdots E_n|H^c)P(H^c)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{10}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \frac{9}{10}} = \frac{3^n}{3^n+9}\,; \quad P(H^c|E_1 \cdots E_n) = 1 - P(H|E_1 \cdots E_n) = \frac{9}{3^n+9}\,.$$

Pertanto: $P(H^c|E_1 \cdots E_n) < P(H|E_1 \cdots E_n) \iff 9 < 3^n \iff n = 3, 4, \ldots$; inoltre $\alpha = P(E_{n+1}|E_1 \cdots E_n) = \frac{P(E_1 \cdots E_n E_{n+1})}{P(E_1 \cdots E_n)} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\cdot\frac{9}{10}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\cdot\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n}\cdot\frac{9}{10}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{3^n+3}{3^n+9} = \frac{3}{4}\left(1 - \frac{6}{3^n+9}\right)$; pertanto α cresce all'aumentare di n, tendendo a $\frac{3}{4}$ (infatti, è come se al crescere di n l'ipotesi H diventasse vera, nel qual caso sarebbe $P(E_{n+1}|E_1 \cdots E_n) = P(E_{n+1}) = \frac{3}{4}$, $\forall\, n$). Infine, osservando che $\alpha = \frac{3}{8}$ per $n = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ per $n = 2$, $\alpha = \frac{5}{8}$ per $n = 3$, ..., segue $\alpha > \frac{1}{2}$, per $n \geq 3$.

3. La distanza aleatoria (in *km*) dopo un tempo t tra i due veicoli è pari a $Yt - Xt = (3X - X)t = 2Xt$. Pertanto, ponendo $t = 1$, si ottiene $Z = 2X$; quindi $m = \mathbb{P}(Z) = 2\mathbb{P}(X) = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} = 2$.
Inoltre, ricordando che $P(X > x + y|X > y) = P(X > x)$, per ogni $x > 0, y > 0$, e che nel nostro caso $P(X > x) = e^{-x}$, segue

$$p = P(Z > 5|Z > 4) = \frac{P(Z > 5, Z > 4)}{P(Z > 4)} = \frac{P(Z > 5)}{P(Z > 4)} = \frac{P(X > \frac{5}{2})}{P(X > 2)} = P\left(X > \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Infine, ricordando che per $Y = aX + b$ si ha $\rho = \frac{a}{|a|} = \pm 1$, essendo $Y = 3X$ segue $\rho = 1$.

4. Osservando che $\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$, $\forall\, \lambda > 0$, si ha

$$\mu = \mathbb{P}(XY) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-x-y}dxdy = \int_0^{+\infty}(xe^{-x}\int_0^{+\infty} ye^{-y}dy)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1\,;$$

$$m = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}[2(X+Y)] = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2(x+y)e^{-x-y}dxdy =$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2xe^{-x-y}dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} 2ye^{-x-y}dxdy = \cdots = 2+2 = 4\,.$$

(*In alternativa: osservando che X e Y sono indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 1, segue:* $\mu = \mathbb{P}(XY) = \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = \cdots$, $m = 2\mathbb{P}(X) + 2\mathbb{P}(Y) = \cdots$).
Infine, si ha $P(Z > 2) = 1 - P(Z \le 2)$, con

$$P(Z \le 2) = P(X+Y \le 1) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-x-y}dy = \int_0^1 e^{-x}[-e^{-y}]_0^{1-x}dx =$$

$$= \int_0^1 e^{-x}(1 - e^{-(1-x)})dx = \int_0^1 e^{-x}dx - e^{-1}\int_0^1 dx = 1 - 2e^{-1}\,;$$

pertanto: $p = P(Z > 2) = 2e^{-1}$.

5. Si ha: $\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{itX}e^{itY}) = \mathbb{P}(e^{itX})\mathbb{P}(e^{itY}) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \frac{e^{2it}}{(2-e^{it})^2}$. Inoltre

$$\varphi'_X(t) = \varphi'_Y(t) = \cdots = \frac{2ie^{it}}{(2-e^{it})^2}\,, \quad \varphi''_X(t) = \varphi''_Y(t) = \cdots = \frac{-4e^{it} - 2e^{2it}}{(2-e^{it})^3}\,;$$

$$\varphi'_X(0) = \varphi'_Y(0) = \cdots = 2i = i\mathbb{P}(X)\,, \quad \varphi''_X(0) = \varphi''_Y(0) = \frac{-4-2}{(2-1)^3} = -6 = i^2\mathbb{P}(X^2) = -\mathbb{P}(X^2)\,;$$

allora

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = 2\,, \quad \mathbb{P}(X^2) = \mathbb{P}(Y^2) = 6\,, \quad \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 2\,;$$

pertanto: $m_Z = \mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = 4$, $\sigma_Z^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 = 4$.
(*Nota: X e Y hanno una distribuzione geometrica di parametro $p = \frac{1}{2}$; Z ha una distribuzione di Pascal di parametri* $2, \frac{1}{2}$)

6. Si ha $T = max\,\{X, Y\}$; quindi $(T \le t) = (X \le t, Y \le t)$. Allora, per ogni fissato $t > 0$, osservando che $P(X \le t) = P(Y \le t) = \int_0^t 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2t}$, segue

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(X \le t, Y \le t) = P(X \le t)P(Y \le t) = (1 - e^{-2t})^2\,;$$

pertanto: $f_T(t) = 2(1 - e^{-2t})(-e^{-2t})(-2) = 4e^{-2t}(1 - e^{-2t})$, per $t \ge 0$, con $f_T(t) = 0$ altrove. Allora, ricordando che $\int_0^{+\infty} \lambda te^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$, si ottiene

$$\mu = \mathbb{P}(T) = \int_0^{+\infty} 4te^{-2t}(1 - e^{-2t})dt = 2\int_0^{+\infty} 2te^{-2t}dt - \int_0^{+\infty} 4te^{-4t}dt = 2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\,.$$

Inoltre $S_T(t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) = 1 - (1 - e^{-2t})^2 = 2e^{-2t} - e^{-4t} = e^{-2t}(2 - e^{-2t})$; pertanto, per ogni fissato $t > 0$ si ha: $h_T(t) = \frac{f_T(t)}{S_T(t)} = \frac{4e^{-2t}(1-e^{-2t})}{e^{-2t}(2-e^{-2t})} = \frac{4-4e^{-2t}}{2-e^{-2t}} = \frac{4e^{2t}-4}{2e^{2t}-1}$.

7. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_{10},\sigma_{10}}$, con $m_{10} = m_0 = 3$ in quanto $\overline{x} = m_0 = 3$. Inoltre $\frac{1}{\sigma_{10}^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{10}{\sigma^2} = 81$ e quindi $\sigma_{10} = \frac{1}{9}$; pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{3,\frac{1}{9}}$. Allora

$$P\left(\frac{25}{9} \le \Theta \le \frac{28}{9} \mid \mathbf{x}\right) = \Phi_{3,\frac{1}{9}}\left(\frac{28}{9}\right) - \Phi_{3,\frac{1}{9}}\left(\frac{25}{9}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{28}{9} - 3}{\frac{1}{9}}\right) - \Phi\left(\frac{\frac{25}{9} - 3}{\frac{1}{9}}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] = \Phi(2) + \Phi(1) - 1 \;\simeq\; 0.9772 + 0.8413 - 1 \;=\; 0.8185\,.$$

Inoltre $Z = a\,\Theta + b \sim N_{m_Z,\sigma_Z}$, con $m_Z = am_{10} + b = 3a + b$, $\sigma_Z = a\sigma_{10} = \frac{1}{9}\,a$; allora $Z \sim N_{0,1}$ se e solo se $3a + b = 0, \frac{1}{9}\,a = 1$, cioè $a = 9, b = -27$. Quindi: $Z = 9\,\Theta - 27$, ovvero $Z = \frac{\Theta - m_{10}}{\sigma_{10}}$.