Probabilità e Statistica (23/10/2015)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un'apparecchiatura M produce pezzi apparentemente identici, ognuno dei quali (indipendentemente dagli altri) è difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$. Un operatore utilizza ripetutamente a caso uno fra tre pezzi prodotti da M. Siano definiti gli eventi H_r = *"r dei tre pezzi sono difettosi"*, $r = 0, 1, 2, 3$; E_i = *"il pezzo scelto a caso l'i-ma volta è non difettoso"*, $i = 1, 2, \ldots$. Calcolare $P(E_2|E_1)$ e $P(H_0|E_1E_2)$.

   $P(E_2|E_1) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $P(H_0|E_1E_2) =$

2. Dato un numero aleatorio Z con distribuzione normale standard e posto $X = 2Z - 1$, $Y = 3Z - 2$, calcolare: (i) $Cov(X + Y, X - Y)$; (ii) $Var(X - Y)$ e $p = P(Y \leq 4|Y \geq -5)$.

   $Cov(X+Y, X-Y) =$ $\qquad\qquad$ $Var(X-Y) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. Da un'urna U contenente 2 palline bianche e 4 nere si tolgono a caso due palline che vengono inserite in un'urna vuota V. Sia X il numero aleatorio di palline bianche inserite in V; inoltre, sia Y il numero aleatorio di palline bianche rimaste in U. Calcolare, per ogni possibile valore (x, y), la probabilità p_{xy} dell'evento $(X = x, Y = y)$. Inoltre, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   (x, y) :
   p_{xy} : $\qquad\qquad\qquad$ $\rho_{XY} =$

4. Due veicoli, a partire da un certo istante, si mettono in movimento nello stesso verso, con velocità aleatorie (in km/h) X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è $f(x, y) = 3e^{-ax-y}$, per $x \geq 0, y \geq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la costante a; (ii) la probabilità p che la distanza aleatoria Z tra i due veicoli dopo un'ora sia maggiore di 2 km.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

5. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = \frac{x}{4}e^{-\frac{x^2}{8}}$ per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove, sia $Y = \frac{X^2}{4}$. Calcolare la previsione di X e la funzione di rischio di Y.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $h_Y(y) =$

6. Un operatore preleva a caso 2 pezzi da un lotto L di 8 pezzi, dei quali 6 sono buoni e 2 difettosi. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra quelli prelevati dall'operatore, calcolare la funzione di ripartizione e la funzione caratteristica di X.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi(t) =$

7. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 4 nere si effettuano 4 estrazioni senza restituzione; Tizio effettua le prime due estrazioni e Caio le successive due. Siano definiti gli eventi E_i = *"nell'i-ma estrazione esce pallina bianca"*, $i = 1, 2, 3, 4$; H = *"Tizio ottiene due palline dello stesso colore"*; K = *"Caio ottiene due palline dello stesso colore"*. Calcolare $\alpha = P(H|H \vee K)$, $\beta = P(K|H \vee K)$ e $\gamma = P(HK|H \vee K)$.

   $\alpha =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\gamma =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 23/10/2015.

1. Si ha $P(H_0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}, P(H_1) = \binom{3}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}, P(H_2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{4}{5} = \frac{12}{125}$, $P(H_3) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$; inoltre
$$P(E_1|H_0) = 1,\ P(E_1|H_1) = \frac{2}{3},\ P(E_1|H_2) = \frac{1}{3},\ P(E_1|H_3) = 0\,,$$
$$P(E_1) = P(E_1|H_0)P(H_0) + P(E_1|H_1)P(H_1) + P(E_1|H_2)P(H_2) + P(E_1|H_3)P(H_3) =$$
$= 1 \cdot \frac{64}{125} + \frac{2}{3}\cdot\frac{48}{125} + \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{125} + 0\cdot\frac{1}{125} = \frac{4}{5}$;
$$P(E_1E_2|H_0) = 1,\ P(E_1E_2|H_1) = \frac{4}{9},\ P(E_1E_2|H_2) = \frac{1}{9},\ P(E_1E_2|H_3) = 0\,,$$
$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H_0)P(H_0)+P(E_1E_2|H_1)P(H_1)+P(E_1E_2|H_2)P(H_2)+P(E_1E_2|H_3)P(H_3) =$$
$= 1 \cdot \frac{64}{125} + \frac{4}{9}\cdot\frac{48}{125} + \frac{1}{9}\cdot\frac{12}{125} + 0\cdot\frac{1}{125} = \frac{52}{75}$. Allora: $P(E_2|E_1) = \frac{\frac{52}{75}}{\frac{4}{5}} = \frac{13}{15}$.
Infine: $P(H_0|E_1E_2) = \frac{P(H_0)P(E_1E_2|H_0)}{P(E_1E_2)} = \frac{\frac{64}{125}\cdot 1}{\frac{52}{75}} = \frac{48}{65} \simeq 0.7385$.

2. Si ha $X + Y = 5Z - 3$, $X - Y = -Z + 1$, $Var(Z) = 1$; pertanto $Cov(X + Y, X - Y) = Cov(5Z - 3, -Z + 1) = -5Cov(Z, Z) = -5Var(Z) = -5$.
Inoltre: $Var(X - Y) = Var(-Z + 1) = Var(Z) = 1$. Infine
$$p = P(Y \le 4|Y \ge -5) = P(Z \le 2|Z \ge -1) = \frac{P(-1 \le Z \le 2)}{P(Z \ge -1)} = \frac{\Phi(2) - \Phi(-1)}{1 - \Phi(-1)} =$$
$$= \frac{\Phi(2) + \Phi(1) - 1}{\Phi(1)} \simeq \frac{0.9772 + 0.8413 - 1}{0.8413} \simeq 0.9729\,.$$

3. Si ha $(X, Y) \in \{(2, 0), (1, 1), (0, 2)\}$, con
$$p_{20} = P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{4}{0}}{\binom{6}{2}} = \frac{1}{15}\,,\quad p_{11} = P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}} = \frac{8}{15}\,,\quad p_{02} = P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{6}{15}\,.$$
Inoltre, osservando che $X + Y = 2$, ovvero $Y = -X + 2$, segue: $\rho_{XY} = -1$.

In alternativa: $X \sim H(6, 2, \frac{1}{3})$, $\mathbb{P}(X) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(Y) = -\mathbb{P}(X) + 2 = \frac{4}{3}$, $Var(X) = Var(Y) = 2 \cdot \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(1 - \frac{1}{5}) = \frac{16}{45}$; inoltre $XY \in \{0, 1\}$, con $\mathbb{P}(XY) = P(XY = 1) = P(X = 1) = \frac{8}{15}$.
Pertanto: $\rho_{XY} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{16}{45}} = -1$.

4. Si ha
$$\int_0^{+\infty} dx \int_{2x}^{+\infty} 3e^{-ax-y}dy = \int_0^{+\infty} 3e^{-ax}[-e^{-y}]_{2x}^{+\infty}dx = \int_0^{+\infty} 3e^{-(a+2)x}dx = \frac{3}{a+2} = 1\,;$$
pertanto: $a = 1$. Inoltre, la distanza aleatoria tra i due veicoli all'istante t è $Yt - Xt$; quindi $Z = Y - X$. Allora, osservando che le rette di equazione $y = 2x$, $y = x + 2$ si

intersecano nel punto $(2,4)$, si ha $(Z \leq 2)$ se e solo se (X,Y) appartiene al triangolo T di vertici i punti $(0,0), (2,4), (0,2)$. Pertanto $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2)$, con

$$P(Z \leq 2) = P(Y \leq X+2) = \int\int_T f(x,y)dxdy = 3\int_0^2 dx \int_{2x}^{x+2} e^{-x-y}dy = 3\int_0^2 e^{-x}[-e^{-y}]_{2x}^{x+2}dx =$$

$$= 3\int_0^2 e^{-x}(e^{-2x} - e^{-x-2})dx = \int_0^2 3e^{-3x}dx - \frac{3e^{-2}}{2}\int_0^2 2e^{-2x}dx = \cdots = 1 - \frac{3e^{-2}}{2} + \frac{e^{-6}}{2},$$

da cui, osservando che $e^{-1} \simeq 0.367879$, $e^{-2} \simeq 0.135335$, $e^{-6} \simeq 0.002479$, segue $p = P(Z > 2) = 1 - (1 - \frac{3e^{-2}}{2} + \frac{e^{-6}}{2}) = \frac{3e^{-2} - e^{-6}}{2} \simeq 0.2018$.

5. Osserviamo che, se $Z \sim N_{0,2}$, allora $\mathbb{P}(Z) = 0$, $Var(Z) = 4 = \mathbb{P}(Z^2)$; inoltre

$$\mathbb{P}(Z^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}}dz = \int_0^{+\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{8}}dz = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{z^2}{4} e^{-\frac{z^2}{8}}dz = 4;$$

pertanto: $\mathbb{P}(X) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^2}{8}}dx = \sqrt{2\pi}$. Inoltre, per ogni fissato $y \geq 0$, si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(X > 2\sqrt{y}) = \int_{2\sqrt{y}}^{+\infty} \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{8}}dx = [-e^{-\frac{x^2}{8}}]_{2\sqrt{y}}^{+\infty} = e^{-\frac{y}{2}};$$

ovvero Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{1}{2}$. Pertanto: $h_Y(y) = \frac{1}{2}$ per $y \geq 0$, con $h_Y(y) = 0$ altrove.

6. Si ha $X \in \{0,1,2\}$, con

$$P(X=0) = \frac{\binom{6}{2}\binom{2}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{15}{28}, \; P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{2}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{7}, \; P(X=2) = \frac{\binom{6}{0}\binom{2}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}.$$

Allora: $F(x) = 0$, per $x < 0$; $F(x) = \frac{15}{28}$, per $0 \leq x < 1$; $F(x) = \frac{27}{28}$, per $1 \leq x < 2$; $F(x) = 1$, per $x \geq 2$. Inoltre, posto $P(X = h) = p_h$, si ha

$$\varphi(t) = \mathbb{P}(e^{itX}) = \sum_{h=0}^{2} p_h e^{ith} = \frac{15 + 12\,e^{it} + e^{2it}}{28}.$$

7. Gli eventi E_i sono scambiabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, i = 1,2,3,4,$

$P(E_iE_j) = P(E_1E_2) = \frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{15}$, $P(E_i^cE_j^c) = P(E_1^cE_2^c) = \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{2}{5}, i \neq j$; inoltre

$$H = E_1E_2 \vee E_1^cE_2^c, \qquad K = E_3E_4 \vee E_3^cE_4^c,$$

$$HK = E_1E_2E_3^cE_4^c \vee E_1^cE_2^cE_3E_4 \vee E_1^cE_2^cE_3^cE_4^c = E_1E_2 \vee E_3E_4 \vee E_5E_6,$$

con $P(H) = P(E_1E_2) + P(E_1^cE_2^c) = \frac{1}{15} + \frac{2}{5} = P(E_3E_4) + P(E_3^cE_4^c) = P(K) = \frac{7}{15}$, $P(HK) = P(E_1E_2) + P(E_3E_4) + P(E_5E_6) = \frac{3}{15}$. Allora

$$\alpha = \frac{P(H)}{P(H) + P(K) - P(HK)} = \frac{P(K)}{P(H) + P(K) - P(HK)} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{15} + \frac{7}{15} - \frac{3}{15}} = \frac{7}{11},$$

$$\gamma = \frac{P(HK)}{P(H) + P(K) - P(HK)} = \frac{\frac{3}{15}}{\frac{7}{15} + \frac{7}{15} - \frac{3}{15}} = \frac{3}{11}.$$