Probabilità e Statistica (11/2/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)
(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Date due urne U e V, ciascuna contenente 2 palline bianche e 2 nere, da ogni urna si tolgono a caso tre palline. Sia X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U ed Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V. Calcolare $Cov(X+Y, X-Y)$; inoltre, calcolare la varianza e la funzione di ripartizione di $Z = Y - X$.

   $Cov(X+Y, X-Y) =$ $\qquad$ $Var(Z) =$ $\qquad$ $F(z) =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [0, 2]$ è $f(x) = cx^2$, per $x \in [0, 2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante c; inoltre, fissato $x_0 \in (0, 1)$, determinare (in funzione di x_0) il valore x_1 tale che $F(x_1) = 8F(x_0)$.

   $c =$ $\qquad$ $x_1 =$

3. Dati 3 numeri aleatori X, con distribuzione normale standard, $Y = 3X + 2$, $Z = 3X - 2$, calcolare: (i) $\alpha = P(Y \leq 2 \,|\, Z \leq 4)$; (ii) $\beta = P(Y + Z > 6 \,|\, Y + Z > -6)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

4. La densità congiunta $f(x, y)$ di un vettore aleatorio (X, Y) è costante per $(x, y) \in T$, dove T è il triangolo di vertici i punti $(2, 4), (2, 2), (4, 2)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, calcolare la funzione di ripartizione di X e la previsione di XY.

   Indip. stocast. ? $\qquad$ $F_1(x) =$ $\qquad$ $\mathbb{P}(XY) =$

5. Un sistema S è composto da due dispositivi in serie, con rispettive durate aleatorie fino al guasto X e Y, stocasticamente indipendenti e con funzioni di rischio $h_1(x) = 3$, $\forall x > 0$, e $h_2(y) = 1$, $\forall y > 0$. Calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio del tempo aleatorio Z di durata fino al guasto di S.

   $S_Z(z) =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Da un'urna contenente tre palline, due delle quali numerate con il numero 1 e una con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X - Y$.

   $\varphi_Z(t) =$

7. Da un lotto di 8 componenti, dei quali solo 2 sono buoni, viene estratto a caso un sottoinsieme di 3 componenti. Successivamente, (con estrazioni a caso senza restituzione), ognuno dei 3 componenti del sottoinsieme viene esaminato. Definiti gli eventi $H_r =$ *"r dei 3 componenti sono buoni"*, $r = 0, 1, 2$, $A_i =$ *"l'i-mo componente scelto a caso risulta buono"*, calcolare $P(A_i), i = 1, 2, 3$, $P(H_1 \,|\, A_1)$ e $P(A_1 \,|\, A_2)$.

   $P(A_i) =$ $\qquad$ $P(H_1 \,|\, A_1) =$ $\qquad$ $P(A_1 \,|\, A_2) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta dell'11/2/2016.

1. Si ha $X \in \{1,2\}$, $Y \in \{1,2\}$, con X e Y stocasticamente indipendenti e con
$$P(X=1) = P(Y=1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\,, \quad P(X=2) = P(Y=2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{1}}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{2}\,.$$
X ed Y hanno la stessa distribuzione ipergeometrica $H(4,3,\frac{1}{2})$, con $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{3}{2}$, $Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{4}$, $Cov(X,Y) = 0$; pertanto
$$Cov(X+Y, X-Y) = Cov(X,X) - Cov(X,Y) + Cov(Y,X) - Cov(Y,Y) = Var(X) - Var(Y) = 0\,.$$
Inoltre: $Var(Z) = Var(Y-X) = Var(Y) + Var(X) - 2\,Cov(X,Y) = \frac{1}{2}$. Infine: $Z \in \{-1,0,1\}$, con
$$P(Z=-1) = P(X=2, Y=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(X=1, Y=2) = P(Z=1), \quad P(Z=0) = \frac{1}{2}\,.$$
Allora: $F(z) = 0$, per $z < -1$; $F(z) = \frac{1}{4}$, per $-1 \le z < 0$; $F(z) = \frac{3}{4}$, per $0 \le z < 1$; $F(z) = 1$, per $z \ge 1$.

2. Si ha: $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 cx^2 dx = \frac{c}{3}[x^3]_0^2 = \frac{8}{3}c = 1$, da cui segue: $c = \frac{3}{8}$. Inoltre, fissato $x_0 \in (0,1)$, si ha: $F(x_0) = \frac{x_0^3}{8}$, $F(x_1) = \frac{x_1^3}{8} = 8 \cdot \frac{x_0^3}{8} = x_0^3$, da cui segue: $x_1 = 2x_0 \in (0,2)$.

3. Si ha
$$\alpha = P(3X+2 \le 2 \,|\, 3X-2 \le 4) = P(X \le 0 \,|\, X \le 2) = \frac{P(X \le 0)}{P(X \le 2)} = \frac{\Phi(0)}{\Phi(2)} \simeq \frac{0.5}{0.9772} \simeq 0.5117\,.$$
$$\beta = P(6X > 6 \,|\, 6X > -6) = P(X > 1 \,|\, X > -1) = \frac{1 - P(X \le 1)}{1 - P(X \le -1)} =$$
$$= \frac{1-\Phi(1)}{1-\Phi(-1)} = \frac{1-\Phi(1)}{\Phi(1)} \simeq \frac{1-0.8413}{0.8413} \simeq 0.1886\,.$$

4. L'area di T è 2, pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{2}$, $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Allora, osservando che l'equazione della retta passante per i punti $(2,4), (4,2)$ è $x+y=6$, segue
$$f_1(x) = \int_2^{6-x} \frac{1}{2} dy = \frac{4-x}{2}\,, \; x \in [2,4]\,, \quad f_2(y) = \int_2^{6-y} \frac{1}{2} dx = \frac{4-y}{2}\,, \; y \in [2,4]\,,$$
con $f_1(x) = 0$, $f_2(y) = 0$ altrove. Essendo $f(x,y) \neq f_1(x)f_2(y)$, X e Y non sono stocasticamente indipendenti. Inoltre: $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t)dt = 0$, per $x \le 2$; $F_1(x) = \int_2^x \frac{4-t}{2}dt = -\frac{x^2}{4} + 2x - 3$, per $x \in (2,4)$; $F_1(x) = 1$, per $x \ge 4$. Infine
$$\mathbb{P}(XY) = \int\int_T xyf(x,y)dxdy = \int_2^4 dx \int_2^{6-x} \frac{1}{2}xydy = \cdots = \frac{1}{4}\int_2^4 (32x - 12x^2 + x^3)dx = \cdots = 7\,.$$

5. Si ha

$$f_1(x) = h_1(x) e^{-\int_0^x h_1(t)dt} = \cdots = 3e^{-3x}\,,\ x \geq 0\,; \qquad f_2(y) = \cdots = e^{-y}\,,\ y \geq 0\,;$$

ovvero: $X \sim Exp(3)$, $Y \sim Exp(1)$. Essendo $Z = min\{X, Y\}$, per ogni $z \geq 0$ si ha

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = e^{-3z}e^{-z} = e^{-4z}\,.$$

Inoltre: $f_Z(z) = -S'_Z(z) = 4\,e^{-4z}$, ovvero $Z \sim Exp(4)$. Allora

$$h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4e^{-4z}}{e^{-4z}} = 4\,, \quad z \geq 0\,.$$

6. Si ha $(X, Y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$, $Z \in \{-1, 0, 1\}$, con

$$(Z = -1) = (X = 1, Y = 2)\,, \quad (Z = 0) = (X = 1, Y = 1)\,, \quad (Z = 1) = (X = 2, Y = 1)\,,$$

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,\ P(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,\ P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\,,$$

$$P(Z = -1) = P(Z = 0) = P(Z = 1) = \frac{1}{3}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = \sum_{h=-1}^{1} p_h e^{ith} = \frac{e^{-it} + 1 + e^{it}}{3} = \frac{1 + 2\cos t}{3}\,.$$

7. Si ha $P(H_r) = \frac{\binom{2}{r}\binom{6}{3-r}}{\binom{8}{3}}$, $r = 0, 1, 2$; quindi: $P(H_0) = \frac{10}{28}$, $P(H_1) = \frac{15}{28}$, $P(H_2) = \frac{3}{28}$. Inoltre, gli eventi A_1, A_2, A_3 sono scambiabili, con $P(A_1|H_0) = 0\,,\ \ P(A_1|H_1) = \frac{1}{3}\,,\ \ P(A_1|H_2) = \frac{2}{3}$; pertanto

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \sum_{r=0}^{2} P(A_1|H_r)P(H_r) = 0\cdot\frac{10}{28} + \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{28} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{28} = \frac{1}{4}\,.$$

Inoltre: $P(H_1\,|\,A_1) = \frac{P(A_1|H_1)P(H_1)}{P(A_1)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{28}}{\frac{1}{4}} = \frac{5}{7}$. Infine, osservando che

$$P(A_1A_2|H_0) = 0\,,\ \ P(A_1A_2|H_1) = 0\,,\ \ P(A_1A_2|H_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\,,$$

si ottiene: $P(A_1A_2) = \sum_{r=0}^{2} P(A_1A_2|H_r)P(H_r) = P(A_1A_2|H_2)P(H_2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{28} = \frac{1}{28}$, da cui segue: $P(A_1\,|\,A_2) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{28}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{7}$; $\quad$ (A_1 e A_2 sono correlati negativamente).