Probabilità e Statistica (7/6/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Un lotto L di 6 pezzi è stato prodotto da un'apparecchiatura A (ipotesi H), oppure B (ipotesi H^c). Ogni pezzo (indipendentemente dagli altri) è non difettoso con probabilità $\frac{4}{5}$ se prodotto da A, con probabilità $\frac{3}{4}$ se prodotto da B. Supposto $P(H^c) = 3P(H)$, sia X il numero aleatorio di pezzi non difettosi nel lotto. Calcolare la probabilità $p = P(X \leq 5)$. Inoltre, supposto che almeno un pezzo del lotto sia non difettoso (evento E), calcolare la probabilità α che il lotto sia stato prodotto da A.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X \in [a, 3a]$ è $f(x) = x - a$, per $x \in [a, 2a]$, $f(x) = -x + 3a$, per $x \in [2a, 3a]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare: (i) la costante a; (ii) la funzione di ripartizione $F(x)$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $F(x) =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X, Y) è $f(x, y) = a(y-x)$, per (x, y) appartenente al triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 2), (0, 2)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a e la probabilità condizionata $p = P(Y \geq 1 \,|\, X \leq 1)$.

   $a =$ $\qquad\qquad\qquad$ $p =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, posto $Z = Y - X$, calcolare la funzione di ripartizione e la previsione di Z.

   $F(z) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(Z) =$

5. Da un'urna contenente 5 palline, due delle quali numerate con il numero -1 e tre con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione ottenendo dei risultati aleatori X e Y. Calcolare $Cov(X, Y)$ e la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.

   $Cov(X, Y) =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\varphi_Z(t) =$

6. Dato un numero aleatorio continuo $X \geq 0$, con densità $f(x) = 25xe^{-5x}$, $x \geq 0$ e con $f(x) = 0$ altrove, Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di sopravvivenza $S(x)$ e la funzione di rischio $h(x)$. Fissati inoltre $x > 0, y > 0$, stabilire se $P(X > x+y \,|\, X > y) = P(X > x)$.

   $S(x) =$ $\qquad\qquad$ $h(x) =$ $\qquad\qquad$ $P(X > x+y \,|\, X > y) = P(X > x)$?

7. Da un'urna U, contenente 4 palline bianche e 5 nere, vengono estratte senza restituzione tutte le palline. Tizio estrae le prime 3 palline; Caio estrae le ultime 3. Ciascuno dei due vince un premio se estrae tutte palline bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", calcolare: (i) la probabilità p che almeno uno tra Tizio e Caio vinca il premio; (ii) la probabilità α che almeno uno dei due vinca il premio, supposto che E_5 ed E_6 siano falsi.

   $p =$ $\qquad\qquad\qquad$ $\alpha =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 7/6/2016.

1. Si ha $P(H) = \frac{1}{4}$, $P(H^c) = \frac{3}{4}$, $p = P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6)$, con

$$P(X = 6) = P(X = 6|H)P(H) + P(X = 6|H^c)P(H^c) =$$

$$= \binom{6}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^{6-6}\cdot\frac{1}{4} + \binom{6}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^6\left(\frac{1}{4}\right)^{6-6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6 + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^6 \simeq 0.199\,;$$

pertanto: $p = P(X \leq 5) \simeq 1 - 0.199 = 0.801$.
Inoltre $E = (X \geq 1)$, $E^c = (X = 0)$, $P(E) = 1 - P(E^c) = 1 - P(X = 0)$, con

$$P(X = 0) = P(X = 0|H)P(H) + P(X = 0|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6 + \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^6 \simeq 0.0002\,;$$

pertanto: $P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)} = \frac{P(H)[1-P(E^c|H)]}{P(E)} = \frac{P(H)[1-P(X=0|H)]}{1-P(X=0)} \simeq \frac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^6\right]}{1-0.0002} \simeq \frac{0.2499}{0.9998} \simeq 0.25 = P(H)$.

2. Dev'essere: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{2a}(x-a)dx + \int_{2a}^{3a}(-x+3a)dx = \cdots = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2 = 1$; pertanto: $a = 1$. Inoltre, ricordando che $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, per $x \leq 1$ si ha: $F(x) = 0$; per $x \geq 3$ si ha: $F(x) = 1$; per $x \in (1,2)$ si ha: $F(x) = \int_1^x(t-1)dt = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}$; per $x \in [2,3)$ si ha: $F(x) = \int_1^2(t-1)dt + \int_2^x(-t+3)dt = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} + 3x - 4 = -\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{7}{2}$.

3. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int\int_T f(x,y)dxdy = a\int_0^2 dx\int_x^2(y-x)dy = \cdots =$
$= a\int_0^2(\frac{x^2}{2} - 2x + 2)dx = \frac{4}{3}a = 1$; pertanto: $a = \frac{3}{4}$. Inoltre

$$p = \frac{P(X \leq 1,\, Y \geq 1)}{P(X \leq 1)} = \frac{\frac{3}{4}\int_0^1 dx\int_1^2(y-x)dy}{\frac{3}{4}\int_0^1 dx\int_x^2(y-x)dy} = \cdots = \frac{\int_0^1(\frac{3}{2}-x)dx}{\int_0^1(\frac{x^2}{2}-2x+2)dx} = \cdots = \frac{6}{7}\,.$$

4. Al variare di (X,Y) in T, si ha $Z \in [0,2]$; in particolare $Z = 0$ quando (X,Y) appartiene al segmento di vertici i punti $(0,0),(2,2)$; $Z = 2$ quando $(X,Y) = (0,2)$. Allora $F(z) = P(Z \leq z) = P(Y \leq X + z) = 0$ per $z \leq 0$, $F(z) = 1$ per $z \geq 2$. Inoltre, fissato $z \in (0,2)$, si ha $(Z > z)$ se e solo se $(X,Y) \in T_z$, dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0,z),(0,2),(2-z,2)$; pertanto: $P(Z > z) = P(Y > X + z) =$

$$= \int_0^{2-z} dx\int_{x+z}^2 \frac{3}{4}(y-x)dy = \cdots = \frac{3}{4}\int_0^{2-z}(\frac{x^2}{2} - 2x - \frac{z^2}{2} + 2)dx = \cdots = \frac{z^3 - 3z^2 + 4}{4}\,,$$

da cui segue: $F(z) = 1 - \frac{z^3-3z^2+4}{4} = \frac{3z^2-z^3}{4}$. Infine: $f(z) = F'(z) = \frac{6z-3z^2}{4}$, per $z \in [0,2]$, con $f(z) = 0$ altrove, da cui segue: $\mathbb{P}(Z) = \int_0^2 zf(z)dz = \frac{1}{4}\int_0^2(6z^2 - 3z^3) = \cdots = 1$.
(tale risultato segue in termini geometrici osservando che il grafico della densità $f(z)$ nell'intervallo $[0,2]$ è un arco di parabola simmetrico rispetto alla retta di equazione $z = 1$)

5. Si ha $X \in \{-1, 2\}$, $Y \in \{-1, 2\}$, $XY \in \{-2, 1, 4\}$, con $P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{2}{5}$, $P(X = 2) = P(Y = 2) = \frac{3}{5}$, $P(XY = -2) = P(X = -1, Y = 2) + P(X = 2, Y = -1) = = P(X = -1)P(Y = 2 \,|\, X = -1) + P(X = 2)P(Y = -1 \,|\, X = 2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{10}$, $P(XY = 1) = P(X = -1, Y = -1) = P(X = -1)P(Y = -1 \,|\, X = -1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, $P(XY = 4) = P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 2 \,|\, X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$. Allora

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \frac{2}{5}(-1) + \frac{3}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(XY) = \frac{6}{10}(-2) + \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{3}{10} \cdot 4 = \frac{1}{10};$$

pertanto: $Cov(XY) = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{10} - \frac{16}{25} = -\frac{27}{50}$. Inoltre $Z \in \{-2, 1, 4\}$, con

$$P(Z = -2) = P(X = -1, Y = -1) = P(X = -1)P(Y = -1 \,|\, X = -1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10},$$

$$P(Z = 4) = P(X = 2, Y = 2) = P(X = 2)P(Y = 2 \,|\, X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10},$$

$P(Z = 1) = 1 - P(Z = -2) - P(Z = 4) = \frac{6}{10}$. Allora, posto $P(Z = h) = p_h$, si ottiene

$$\varphi_Z(t) = \sum_h p_h e^{ith} = \frac{1}{10}e^{-2it} + \frac{6}{10}e^{it} + \frac{3}{10}e^{4it} = \frac{e^{-2it} + 6e^{it} + 3e^{4it}}{10}.$$

6. Per ogni $x > 0$, si ha

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} 25te^{-5t}dt = [5t(-e^{-5t})]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} 5e^{-5t}dt = 5xe^{-5x} + e^{-5x} = (5x+1)e^{-5x},$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{25xe^{-5x}}{(5x+1)e^{-5x}} = \frac{25x}{5x+1}.$$

Inoltre, $P(X > x + y \,|\, X > y) \neq P(X > x)$ in quanto la distribuzione non è esponenziale; infatti

$$P(X > x + y \,|\, X > y) = \frac{P(X > x + y)}{P(X > y)} = \frac{S(x + y)}{S(y)} = \frac{(5x + 5y + 1)e^{-5x-5y}}{(5y + 1)e^{-5y}} =$$

$$= \frac{(5x + 5y + 1)e^{-5x}}{5y + 1} = \left(\frac{5x}{5y + 1} + 1\right)e^{-5x} \neq (5x + 1)e^{-5x} = P(X > x).$$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_9$ sono scambiabili, con

$$P(E_i) = \frac{4}{9}, \; P(E_i^c) = \frac{5}{9}, \; P(E_iE_jE_k) = P(E_1E_2E_3) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}, \; i \neq j \neq k.$$

Inoltre, si ha $A = E_1E_2E_3$, $B = E_7E_8E_9$, con A e B incompatibili. Allora

$$p = P(A \vee B) = P(A) + P(B) = P(E_1E_2E_3) + P(E_7E_8E_9) = 2P(E_1E_2E_3) = \frac{2}{21}.$$

Infine, dalla scambiabilità degli eventi $E_1, \ldots, E_9$ segue $P(AE_5^cE_6^c) = P(E_1E_2E_3E_5^cE_6^c) =$

$$= P(E_5^cE_6^cE_7E_8E_9) = P(BE_5^cE_6^c) = P(E_1E_2E_3E_4^cE_5^c) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{63};$$

allora, osservando che $P(E_5^cE_6^c) = P(E_1^cE_2^c) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$ e che $AE_5^cE_6^c$ e $BE_5^cE_6^c$ sono incompatibili, si ottiene: $\alpha = P(A \vee B \,|\, E_5^cE_6^c) = \frac{P[(A \vee B) \wedge E_5^cE_6^c]}{P(E_5^cE_6^c)} =$

$$= \frac{P(AE_5^cE_6^c \vee BE_5^cE_6^c)}{P(E_5^cE_6^c)} = \frac{P(AE_5^cE_6^c) + P(BE_5^cE_6^c)}{P(E_5^cE_6^c)} = \frac{\frac{2}{63} + \frac{2}{63}}{\frac{5}{18}} = \frac{8}{35}.$$