Probabilità e Statistica (7/7/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = \frac{x}{4}$, per $x \in [0,2]$, $f(x) = \frac{1}{2}$, per $x \in (2,3]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$; inoltre, determinare il valore x_0 tale che $P(X > x_0) = \frac{7}{8}$.

   $F(x) =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

2. I pezzi prodotti da una macchina sono scartati se presentano almeno 2 di 3 possibili difetti. Scelto a caso un pezzo, sia $E_i =$ l'evento *"il pezzo presenta l'i-mo difetto"*, $i = 1,2,3$, con E_1, E_2, E_3 indipendenti e con $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = p \in (0,1)$. Sia α la probabilità che il pezzo non presenti alcun difetto; calcolare i valori di p tali che $\alpha > \frac{64}{125}$; inoltre, assumendo $p = \frac{1}{5}$, calcolare la probabilità β che il pezzo non sia scartato e la probabilità γ che il componente non presenti il primo tipo di difetto, supposto che sia scartato.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $\beta =$ $\qquad\qquad$ $\gamma =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio (X,Y) è $f(x,y) = cxy$, per (x,y) appartenente al quadrato $Q = [2,4] \times [0,2]$, con $c > 0$ e con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante c e il valore a tale che $P(Y \leq aX) = P(Y > aX)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $a =$

4. Tre studenti S_1, S_2, S_3 devono sostenere un esame con la stessa commissione: C_1 (ipotesi H), oppure C_2 (ipotesi H^c), con $P(H^c) = P(H)$. Con la commissione C_1 ogni studente ha probabilità $2p$ di superare l'esame, mentre con C_2 la probabilità è p, con $0 < p < \frac{1}{2}$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"lo studente S_i supera l'esame"*, $i = 1,2,3$, si supponga che E_1, E_2, E_3 siano indipendenti sia condizionatamente ad H che ad H^c. Inoltre, indicando con X il numero aleatorio di studenti promossi, calcolare: (i) i valori di p tali che $P(X \geq 2 \,|\, X \geq 1) > \frac{1}{2}$; (ii) la probabilità condizionata $P(H^c \,|\, X = 3)$.

   $p \in$ $\qquad\qquad$ $P(H^c \,|\, X = 3) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X,Y) è $f(x,y) = ae^{-x-y}$,per $x \geq 0$, $y \geq x$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Calcolare la costante a; inoltre, posto $Z = X + Y$, calcolare la funzione di rischio $h(z)$ di Z, per ogni $z > 0$, e la previsione di Z.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $h(z) =$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{P}(Z) =$

6. Dati due numeri aleatori X e Y, indipendenti e con distribuzione normale standard, posto $V = 2X + 1$, $W = 2Y - 1$, calcolare la funzione caratteristica di $Z = V + W$ e la covarianza della coppia $(X + W, Y + V)$. (*ricordiamo che per una distribuzione $N_{m,\sigma}$* la funzione caratteristica è $\varphi(t) = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$)

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X+W, Y+V) =$

7. Da un'urna U, contenente 4 palline bianche e 5 nere, vengono estratte tutte le palline. Tizio estrae le prime 4 palline; Caio estrae le ultime 4. Ciascuno dei due vince un premio se estrae tutte palline bianche. Definiti gli eventi: $A =$ "Tizio vince il premio", $B =$ "Caio vince il premio", $E_i =$ "l'i-ma pallina estratta è bianca", $i = 1, \ldots, 9$, calcolare $P(A \vee B)$ e $P(A \vee B \,|\, E_5^c)$.

   $P(A \vee B) =$ $\qquad\qquad$ $P(A \vee B \,|\, E_5^c) =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 7/7/2016.

1. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x \geq 3$; inoltre, per $x \in (0, 2]$, si ha $F(x) = \int_0^x \frac{t}{4}dt = \frac{x^2}{8}$; per $x \in (2, 3]$, si ha $F(x) = \int_0^2 \frac{t}{4}dt + \int_2^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2} + \frac{x-2}{2} = \frac{x-1}{2}$. Inoltre, osservando che $F(x_0) = 1 - P(X > x_0) = \frac{1}{8} < \frac{1}{2} = F(2) = P(X \leq 2)$, segue $x_0 \in (0, 2)$; allora $P(X > x_0) = 1 - F(x_0) = 1 - \frac{x_0^2}{8} = \frac{7}{8}$, ovvero: $x_0^2 = 1$, pertanto: $x_0 = 1$.

2. Si ha $\alpha = P(E_1^c E_2^c E_3^c) = (1-p)^3 > \frac{64}{125} \iff 1 - p > \frac{4}{5} \iff p < \frac{1}{5}$. Inoltre, osservando che $\beta = P(E_1^c E_2^c \vee E_1^c E_3^c \vee E_2^c E_3^c)$, con $P(E_i^c E_j^c) = (1-p)^2 = \frac{16}{25}$, $i \neq j$, $P(E_1^c E_2^c E_3^c) = (1-p)^3 = \frac{64}{125}$, si ha
$$\beta = \cdots = 3P(E_1^c E_2^c) - 2P(E_1^c E_2^c E_3^c) = 3 \cdot \frac{16}{25} - 2 \cdot \frac{64}{125} = \frac{112}{125} = 0.896\,.$$
Infine, poichè il pezzo è scartato se e solo se si verifica l'evento $E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3$, con $P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = 3P(E_1E_2) - 2P(E_1E_2E_3) = 3 \cdot \frac{1}{25} - 2 \cdot \frac{1}{125} = \frac{13}{125}$, si ha
$$\gamma = P(E_1^c \,|\, E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \frac{P(E_1^c E_2 E_3)}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{25}}{\frac{13}{125}} = \frac{4}{13} \simeq 0.3077\,.$$

3. Si ha: $\int\int_Q f(x,y)dxdy = \int_2^4 dx \int_0^2 cxydy = \cdots = 12c = 1$; pertanto: $c = \frac{1}{12}$. Inoltre, essendo $P(Y \leq aX) + P(Y > aX) = 1$, segue $P(Y \leq aX) = P(Y > aX) = \frac{1}{2}$. Osservando che la retta di equazione $y = \frac{x}{2}$ (corrispondente ad $a = \frac{1}{2}$) passa per il punto $[4, 2]$, con
$$P\left(Y \leq \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{12}\int_2^4 dx \int_0^{\frac{x}{2}} xydy = \cdots = \frac{1}{96}\int_2^4 x^3 dx = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}\,,$$
segue: $a < \frac{1}{2}$. Pertanto
$$P(Y \leq aX) = \frac{1}{12}\int_2^4 dx \int_0^{ax} xydy = \cdots = \frac{a^2}{24}\int_2^4 x^3 dx = \frac{5}{2}a^2 = \frac{1}{2}\,;$$
allora: $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4. Si ha $P(H) + P(H^c) = 1$; pertanto $P(H) = P(H^c) = \frac{1}{2}$. Inoltre
$$(X \geq 1) = E_1 \vee E_2 \vee E_3\,,\ \ (X \geq 2) = E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3\,,\ \ (X \geq 1) \wedge (X \geq 2) = (X \geq 2)\,.$$
Pertanto: $P(X \geq 2 \,|\, X \geq 1) = \frac{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)}$, con
$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3) - P(E_2E_3) + P(E_1E_2E_3)\,,$$
$$P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \cdots = P(E_1E_2) + P(E_1E_3) + P(E_2E_3) - P(E_1E_2E_3) - P(E_1E_2E_3)\,.$$
Allora, osservando che
$$P(E_i) = P(E_i|H)P(H) + P(E_i|H^c)P(H^c) = 2p \cdot \frac{1}{2} + p \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}p\,,\ i = 1, 2, 3,$$

$$P(E_iE_j) = P(E_iE_j|H)P(H) + P(E_iE_j|H^c)P(H^c) = 4p^2 \cdot \frac{1}{2} + p^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}p^2\,,\ i \neq j,$$

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = 8p^3 \cdot \frac{1}{2} + p^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}p^3\,,\ i \neq j,$$

ricordando che $0 < p < \frac{1}{2}$, segue

$$P(X \geq 2\,|\,X \geq 1) = \cdots = \frac{5p - 6p^2}{3 - 5p + 3p^2} > \frac{1}{2} \iff 5p^2 - 5p + 1 < 0 \iff \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} < p < \frac{1}{2}\,.$$

Infine, osservando che $(X = 3) = E_1E_2E_3$, segue

$$P(H^c\,|\,X = 3) = \frac{P(X = 3\,|\,H^c)P(H^c)}{P(X = 3)} = \frac{P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c)}{P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{1}{2}p^3}{\frac{9}{2}p^3} = \frac{1}{9}\,.$$

5. Si ha: $\int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} ae^{-x-y}dy = a\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx = \frac{a}{2} = 1$; pertanto $a = 2$. Inoltre, fissato $z > 0$ e considerato il triangolo T_z di vertici i punti $(0,0), (\frac{z}{2}, \frac{z}{2}), (0, z)$, l'evento $(Z \leq z)$ coincide con l'evento $(X, Y) \in T_z$; allora

$$F(z) = P(Z \leq z) = \int\int_{T_z} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_x^{z-x} 2e^{-x-y}dy = \cdots = 1 - e^{-z} - ze^{-z}\,,$$

da cui segue: $f(z) = F'(z) = ze^{-z} = G_{2,1}(z)$ (distribuzione Gamma, con $c = 2, \lambda = 1$); inoltre

$$S(z) = P(Z > z) = 1 - F(z) = e^{-z} + ze^{-z}\,; \quad h(z) = \frac{f(z)}{S(z)} = \frac{ze^{-z}}{e^{-z} + ze^{-z}} = \frac{z}{1+z}\,.$$

Infine: $\mathbb{P}(Z) = \int_0^{+\infty} zf(z)dz = \int_0^{+\infty} z^2e^{-z}dz = \Gamma(3) = 2$; infatti, per una distribuzione $G_{c,\lambda}$ la previsione è $\frac{c}{\lambda}$.

6. Si ha: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$; inoltre X e Y sono stocasticamente indipendenti; allora

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(V+W)}) = \mathbb{P}(e^{i(2t)(X+Y)}) = \varphi_{X+Y}(2t) = \varphi_X(2t)\varphi_Y(2t) = e^{-4t^2}\ ; \ (Z \sim N_{0,2\sqrt{2}})\,.$$

Infine: $Cov(X + W, Y + V) = Cov(X + 2Y + 1, Y + 2X + 1) = Cov(X + 2Y, Y + 2X) =$

$$= Cov(X,Y) + 2Cov(X,X) + 2Cov(Y,Y) + 4Cov(Y,X) = 2Var(X) + 2Var(Y) = 4\,.$$

7. Gli eventi $E_1, \ldots, E_9$ sono scambiabili, con

$$P(E_i) = \frac{4}{9}\,,\ P(E_i^c) = \frac{5}{9}\,,\ P(E_iE_jE_kE_t) = P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{126}\,,\ i \neq j \neq k \neq t\,.$$

Inoltre, si ha $A = E_1E_2E_3E_4$, $B = E_6E_7E_8E_9$, con A e B incompatibili. Allora

$$P(A \vee B) = P(A) + P(B) = P(E_1E_2E_3E_4) + P(E_6E_7E_8E_9) = 2P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{1}{63}\,.$$

Infine, dalla scambiabilità degli eventi $E_1, \ldots, E_9$ segue: $P(AE_5^c) = P(E_1E_2E_3E_4E_5^c) = P(E_5^cE_6E_7E_8E_9) = P(BE_5^c)$, con $P(E_1E_2E_3E_4E_5^c) = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1 = \frac{1}{126}$; allora, osservando che AE_5^c e BE_5^c sono incompatibili, si ottiene

$$P(A \vee B\,|\,E_5^c) = \frac{P[(A \vee B) \wedge E_5^c]}{P(E_5^c)} = \frac{P(AE_5^c \vee BE_5^c)}{P(E_5^c)} = \frac{P(AE_5^c) + P(BE_5^c)}{P(E_5^c)} = \frac{\frac{1}{126} + \frac{1}{126}}{\frac{5}{9}} = \frac{1}{35}\,.$$