**Probabilità e Statistica** (15/9/2016)

*(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)*

*(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)*

1. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X$ è $f(x) = cx^2$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{12-6x}{5}$, per $x \in (1,2]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante $c$; inoltre, determinare il valore $x_0$ tale che $P(X > x_0) = 19\, P(X \leq x_0)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

2. I pezzi prodotti da una macchina sono scartati se presentano almeno uno di 3 possibili difetti. Scelto a caso un pezzo, sia $E_i$ l'evento *"il pezzo presenta l'i-mo difetto"*, $i = 1, 2, 3$, con $E_1, E_2, E_3$ indipendenti e con $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$. Calcolare: (i) la varianza del numero aleatorio $X$ di difetti presenti nel pezzo; (ii) la probabilità $\alpha$ che il pezzo presenti al massimo 2 difetti; (iii) la probabilità $\beta$ che il pezzo sia scartato, supposto che sia presente al massimo un difetto.

   $Var(X) =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

3. La densità congiunta di un vettore aleatorio $(X, Y)$ è $f(x, y) = c$, per $(x, y)$ appartenente al triangolo $T$ di vertici i punti $(1, 1), (3, 1), (3, 3)$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $c$ e il valore $a$ tale che $P(Y \leq X + a) = P(Y > X + a)$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ $a =$

4. Tre studenti $S_1, S_2, S_3$ devono sostenere un esame con la stessa commissione: $C_1$ (ipotesi $H$), oppure $C_2$ (ipotesi $H^c$), con $P(H^c) = 2P(H)$. Con la commissione $C_1$ ogni studente ha probabilità $\frac{3}{4}$ di superare l'esame, mentre con $C_2$ la probabilità è $\frac{1}{2}$. Definiti gli eventi $E_i =$ *"lo studente $S_i$ supera l'esame"*, $i = 1, 2, 3$, si supponga che $E_1, E_2, E_3$ siano indipendenti sia condizionatamente ad $H$ che ad $H^c$. Inoltre, sia $X$ il numero aleatorio di studenti promossi. Calcolare la probabilità condizionata $p = P(X = 3 \,|\, X \geq 2)$ e stabilire se la disuguaglianza $P(H^c \,|\, X = 3) > P(H \,|\, X = 3)$ è valida, oppure no.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $P(H^c \,|\, X = 3) > P(H \,|\, X = 3)$ ?

5. Siano dati due numeri aleatori $X$ e $Y$, stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametri $\lambda_X = 2, \lambda_Y = 3$. Posto $Z = \min\{X, Y\}$, calcolare la funzione di rischio di $Z$ e la probabilità condizionata $p = P(Z > 3 | Z > 2)$.

   $h_Z(z) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Dati due numeri aleatori $X$ e $Y$, indipendenti e con distribuzione binomiale di parametri $n = 4, p = \frac{1}{4}$, posto $V = X-2$, $W = Y+2$, calcolare la funzione caratteristica di $Z = V+W$ e la covarianza della coppia $(X+V, Y+W)$. (*ricordiamo che per una distribuzione $B(n, p)$ la funzione caratteristica è $\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$*)

   $\varphi_Z(t) =$ $\qquad\qquad$ $Cov(X+V, Y+W) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio $\Theta$ è $\beta(\theta) = \frac{1}{6}\theta^3 e^{-\theta}$, per $\theta \geq 0$, con $\beta(\theta) = 0$ altrove. Le componenti di un campione casuale $(X_1, X_2, X_3, X_4)$, subordinatamente ad ogni fissato valore $\theta$ di $\Theta$, hanno una distribuzione esponenziale di parametro $\theta$. Indicando con $\mathbf{x}$ un campione osservato $(x_1, x_2, x_3, x_4)$, con $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$, calcolare la previsione $m_4$ e lo scarto quadratico medio $\sigma_4$ di $\Theta|\mathbf{x}$.

   $m_4 =$ $\qquad\qquad$ $\sigma_4 =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

*Soluzioni della prova scritta del 15/9/2016.*

1. Si ha: $\int_0^1 cx^2dx + \int_1^2 \frac{12-6x}{5}dx = \cdots = \frac{c}{3} + \frac{3}{5} = 1$, da cui segue: $c = \frac{6}{5}$. Inoltre, $P(X \le x_0) + P(X > x_0) = 20\, P(X \le x_0) = 1$; pertanto: $P(X \le x_0) = F(x_0) = \frac{1}{20}$. Allora, tenendo conto che per $x \in [0,1]$ si ha $F(x) = \frac{2}{5}\, x^3$, con $F(1) = \frac{2}{5} > \frac{1}{20} = F(x_0)$, segue $x_0 \in [0,1]$; pertanto: $F(x_0) = \frac{2}{5}\, x_0^3 = \frac{1}{20}$, da cui segue: $x_0 = \frac{1}{2}$.

2. Si ha $X \sim B(3, \frac{1}{3})$, da cui segue: $Var(X) = npq = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$. Inoltre $\alpha = P(X \le 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - P(E_1E_2E_3) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{26}{27}$. Infine $\beta = P(X \ge 1 \,|\, X \le 1) = \frac{P(X=1)}{P(X\le 1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)} = \frac{\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^3+\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{27}+\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$.

3. L'area di $T$ è $\mu(T) = 2$; pertanto: $\int\int_T f(x,y)dxdy = \int\int_T cdxdy = c\mu(T) = 2c = 1$, da cui segue: $c = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$. Inoltre, per $a \in [-2, 0]$, la retta di equazione $y = x + a$ interseca il triangolo $T$ nei punti $(1-a, 1), (3, 3+a)$. Allora, osservando che le condizioni $P(Y \le X + a) + P(Y > X + a) = 1$, $P(Y \le X + a) = P(Y > X + a)$ equivalgono a $P(Y \le X + a) = P(Y > X + a) = \frac{1}{2}$, si ha
$$P(Y \le X + a) = \int_{1-a}^{3} dx \int_1^{x+a} \frac{1}{2}dy = \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+a)^2}{2} = \frac{1}{2} \iff a = -2 + \sqrt{2}\,.$$
*Nota:* poichè $(X,Y) \sim U(T)$, la retta di equazione $y = x - 2 + \sqrt{2}$ divide $T$ in due parti aventi la stessa area: $\frac{1}{2}\,\mu(T) = 1$.

4. Si ha $P(H) + P(H^c) = 3P(H) = 1$; pertanto $P(H) = \frac{1}{3}$, $P(H^c) = \frac{2}{3}$. Inoltre
$$(X = 3) = E_1E_2E_3\,, \quad (X \ge 2) = E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3\,, \quad (X = 3) \wedge (X \ge 2) = (X = 3)\,.$$
Pertanto: $p = P(X = 3 \,|\, X \ge 2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)}$, con
$$P(E_1E_2) = P(E_1E_2|H)P(H) + P(E_1E_2|H^c)P(H^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{3} = \frac{17}{48} = P(E_iE_j)\,,\ i \ne j\,;$$
$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = \left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{2}{3} = \frac{43}{192}\,.$$
$$P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \cdots = 3P(E_1E_2) - 2P(E_1E_2E_3) = 3 \cdot \frac{17}{48} - 2 \cdot \frac{43}{192} = \frac{59}{96}\,.$$
Allora
$$p = P(X = 3 \,|\, X \ge 2) = \frac{P(E_1E_2E_3)}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)} = \frac{\frac{43}{192}}{\frac{59}{96}} = \frac{43}{118}\,.$$
Infine, osservando che $P(H \,|\, X = 3) = 1 - P(H^c \,|\, X = 3)$, si ha
$$P(H^c \,|\, X = 3) = \frac{P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c)}{P(E_1E_2E_3)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{2}{3}}{\frac{43}{192}} = \frac{16}{43} \;<\; \frac{27}{43} = P(H \,|\, X = 3)\,.$$

5. Si ha $Z \geq 0$; inoltre per ogni fissato $z > 0$, osservando che $P(X > z) = S_X(z) = e^{-2z}$, $P(Y > z) = S_Y(z) = e^{-3z}$, risulta

$$S_Z(z) = P(Z > z) = P(X > z, Y > z) = P(X > z)P(Y > z) = S_X(z)S_Y(z) = e^{-5z}\,;$$

allora: $h_Z(z) = -\frac{S'_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{5e^{-5z}}{e^{-5z}} = 5$, ovvero $Z$ ha una distribuzione esponenziale di parametro 5. Inoltre

$$p = P(Z > 3|Z > 2) = \frac{P(Z > 3, Z > 2)}{P(Z > 2)} = \frac{P(Z > 3)}{P(Z > 2)} = \frac{e^{-15}}{e^{-10}} = e^{-5} = P(Z > 1)\,.$$

(*proprietà di assenza di memoria:* $P(Z > 3\,|\,Z > 2) = P(Z > 1 + 2\,|\,Z > 2) = P(Z > 1)$)

6. Si ha: $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = (\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4})^4$; inoltre $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti; allora

$$\varphi_Z(t) = \mathbb{P}(e^{itZ}) = \mathbb{P}(e^{it(V+W)}) = \mathbb{P}(e^{it(X+Y)}) = \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4}\right)^8\,;$$

ovvero, $Z$ ha una distribuzione binomiale $B(8, \frac{1}{4})$. Infine, osservando che nel nostro caso $Cov(X,Y) = 0$ e ricordando che $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X,Y)$, si ha

$$Cov(X + V, Y + W) = Cov(2X - 2, 2Y + 2) = 4Cov(X,Y) = 0\,.$$

7. Si ha $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$; allora, per la funzione di verosimiglianza, si ottiene $\alpha(\theta|\mathbf{x}) = \theta e^{-\theta x_1} \cdots \theta e^{-\theta x_4} = \theta^4 e^{-3\theta}$. Pertanto

$$\beta(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\beta(\theta)\alpha(\theta|\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\frac{1}{6}\theta^3 e^{-\theta}\theta^4 e^{-3\theta} = k_1(\mathbf{x})\theta^7 e^{-4\theta}\,,\ \theta \geq 0\,;$$

ovvero: $\Theta|\mathbf{x} \sim G_{8,4}(\theta)$, con $k_1(\mathbf{x}) = \frac{\lambda^c}{\Gamma(c)} = \frac{4^8}{7!}$. Allora

$$m_4 = \mathbb{P}(\Theta|\mathbf{x}) = \frac{c}{\lambda} = \frac{8}{4} = 2\,, \quad \sigma_4 = \sqrt{\frac{c}{\lambda^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$