Probabilità e Statistica (17/10/2016)

(Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. I costituenti relativi a tre eventi A, B, C, con $A \subset B \subset C$, sono ugualmente probabili. Posto $X = |A| - |B| + |C|$, calcolare la previsione e la funzione di ripartizione di X.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $F(x) =$

2. Da un'urna contenente una pallina bianca e quattro nere si effettuano 5 estrazioni senza restituzione. Sia E_i l'evento "la pallina bianca esce all'i-ma estrazione", $i = 1, \ldots, 5$, ed X il numero aleatorio di estrazioni fino all'uscita della pallina bianca. Tizio vince un premio se la pallina bianca esce nella prima o nella seconda estrazione, mentre Caio vince il premio se la pallina bianca esce nella quarta o nella quinta estrazione. Calcolare: (i) la previsione di X; (ii) la probabilità p che il premio venga vinto da Tizio oppure da Caio; (iii) la probabilità γ che il premio venga vinto da Tizio, condizionata all'evento $(X \leq 3)$.

   $\mathbb{P}(X) =$ $\qquad$ $p =$ $\qquad$ $\gamma =$

3. Due oggetti, A e B, effettuano un percorso di 2 km con velocità aleatorie (in km/h) X e Y. La densità congiunta di (X, Y) è uniforme sul quadrato Q di vertici i punti $(0,0), (4,0), (4,4), (0,4)$. Calcolare: (i) la probabilità α che sia A che B impieghino almeno un'ora per effettuare il percorso; (ii) la probabilità β che A effettui il percorso entro un'ora, condizionata all'evento $(X + Y \geq 4)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

4. Una macchina M produce pezzi che sono difettosi con probabilità $\frac{1}{5}$. In un lotto L di 3 pezzi buoni si aggiunge un pezzo che può essere difettoso (ipotesi H), oppure non difettoso (ipotesi H^c). Successivamente, da L si estraggono tutti i pezzi senza restituzione. Posto E_i = "l'i-mo pezzo estratto è non difettoso", $i = 1, 2, 3, 4$, calcolare la probabilità $\alpha = P(E_1 E_2 E_3)$ e la probabilità $\beta = P(E_4 | E_1 E_2 E_3)$.

   $\alpha =$ $\qquad$ $\beta =$

5. Siano dati due numeri aleatori X e Y, non negativi e stocasticamente indipendenti, con $F_1(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-2x}$, per $x \geq 0$, ed $S_2(y) = P(Y > y) = (1 + 2y)e^{-2y}$, per $y \geq 0$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione e la funzione di rischio di Z.

   $\mathbb{P}(Z) =$ $\qquad$ $h_Z(z) =$

6. Dati tre numeri aleatori X, Y, Z, indipendenti e ugualmente distribuiti, con funzione caratteristica $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t) = \varphi_Z(t) = e^{-3t^2}$, calcolare la funzione caratteristica e la varianza della media aritmetica $M = \frac{X+Y+Z}{3}$.

   $\varphi_M(t) =$ $\qquad$ $Var(M) =$

7. La durata aleatoria Θ di un certo tipo di dispositivo ha una distribuzione iniziale normale, di parametri $m_0 = 4$, $\sigma_0 = 2$. Nelle prove di laboratorio effettuate su 5 dispositivi simili si è osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, con $x_1 + \cdots + x_5 = 20$. Le componenti del campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale $N_{\theta, \frac{1}{2}}$. Calcolare la previsione m_5 e lo scarto quadratico medio σ_5 di $\Theta | \mathbf{x}$. Inoltre, calcolare la probabilità $p = P(\Theta > \frac{38}{9} \,|\, \mathbf{x})$.

   $m_5 =$ $\qquad$ $\sigma_5 =$ $\qquad$ $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civile - Trasporti - Elettronica, Roma)

Soluzioni della prova scritta del 17/10/2016.

1. I costituenti sono

$$C_1 = ABC\,, \quad C_2 = A^cBC\,, \quad C_3 = A^cB^cC\,, \quad C_4 = A^cB^cC^c\,;$$

pertanto $P(C_h) = \frac{1}{4}$, $h = 1, 2, 3, 4$. Inoltre, i valori possibili di X sono 0 e 1, con

$$(X = 0) = C_2 \vee C_4\,, \;\; (X = 1) = C_1 \vee C_3\,, \quad P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}\,.$$

Allora: $\mathbb{P}(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Infine, $F(x) = 0$, per $x < 0$; $F(x) = \frac{1}{2}$, per $0 \leq x < 1$; $F(x) = 1$, per $x \geq 1$.

2. Gli eventi E_i sono scambiabili e in particolare equiprobabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{1}{5}$; inoltre l'evento $(X = i)$ coincide con l'evento E_i; pertanto: $P(X = i) = \frac{1}{5}$, $i = 1, \ldots, 5$, da cui segue: $\mathbb{P}(X) = \frac{1+2+\cdots+5}{5} = 3$. Il premio viene vinto da Tizio oppure da Caio se e solo se la pallina bianca non esce alla terza estrazione; pertanto: $p = P(E_3^c) = \frac{4}{5}$. Infine, osservando che Tizio vince il premio se e solo se $(X \leq 2)$, segue

$$\gamma = P(X \leq 2 \,|\, X \leq 3) = \frac{P(X \leq 2, X \leq 3)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(X \leq 2)}{P(X \leq 3)} = \frac{P(E_1 \vee E_2)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{2}{3}\,.$$

3. Si ha $f(x, y) = \frac{1}{16}$, per $(x, y) \in Q$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre, A e B impiegano entrambi almeno un'ora per effettuare il percorso se e solo se $X \leq 2$ e $Y \leq 2$; pertanto

$$\alpha = P(X \leq 2, Y \leq 2) = P(X \in [0, 2], Y \in [0, 2]) = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{16} dxdy = \frac{1}{4}\,.$$

Infine, osservando che A effettua il percorso entro un'ora se e solo se $(X \geq 2)$ e che l'equazione della retta passante per i punti $(4, 0), (0, 4)$ è $y = 4 - x$, segue

$$\beta = P(X \geq 2 \,|\, X + Y \geq 4) = \frac{P(X \geq 2, X + Y \geq 4)}{P(X + Y \geq 4)} = \frac{\int_2^4 \int_{4-x}^4 \frac{1}{4}\, dxdy}{\int_0^4 \int_{4-x}^4 \frac{1}{4}\, dxdy} = \cdots = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha $P(H) = \frac{1}{5}$, $P(H^c) = \frac{4}{5}$; inoltre

$$P(E_1E_2E_3|H) = P(E_1|H)P(E_2|E_1H)P(E_3|E_1E_2H) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,, \quad P(E_1E_2E_3|H^c) = 1\,.$$

Allora

$$\alpha = P(E_1E_2E_3) = P(E_1E_2E_3|H)P(H) + P(E_1E_2E_3|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{17}{20}\,.$$

Infine

$$P(E_1E_2E_3E_4|H) = 0\,, \quad P(E_1E_2E_3E_4|H^c) = 1\,,$$

da cui segue: $P(E_1E_2E_3E_4) = P(E_1E_2E_3E_4|H)P(H) + P(E_1E_2E_3E_4|H^c)P(H^c) = \frac{4}{5}$; pertanto:

$$\beta = P(E_4|E_1E_2E_3) = \frac{P(E_1E_2E_3E_4)}{P(E_1E_2E_3)} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{17}{20}} = \frac{16}{17}\,.$$

5. Si ha $f_1(x) = F_1'(x) = 2e^{-2x}$ (distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$); pertanto: $\mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$; inoltre, $f_2(y) = -S_2'(y) = \cdots = 4ye^{-2y}$ (distribuzione Gamma di parametri $c = \lambda = 2$); pertanto: $\mathbb{P}(Y) = \frac{c}{\lambda} = 1$; allora: $\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) = \frac{3}{2}$. Inoltre, fissato $z \geq 0$ e indicato con T_z il triangolo di vertici i punti $(0,0), (z,0), (0,z)$, l'evento $(Z \leq z)$ coincide con l'evento $[(X,Y) \in T_z]$. Tenendo conto che l'equazione della retta passante per i punti $(z,0), (0,z)$ è $y = z - x$, si ottiene

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P[(X,Y) \in T_z] = \int\int_{T_z} f(x,y)dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} f_1(x)f_2(y)dy =$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x}F_2(z-x)dx = \int_0^z 2e^{-2x}[1-S_2(z-x)]dx = \int_0^z 2e^{-2x}[1-e^{-2(z-x)}-2(z-x)e^{-2(z-x)}]dx =$$

$$= \int_0^z 2e^{-2x}dx - 2e^{-2z}\int_0^z dx - 4e^{-2z}\int_0^z (z-x)dx = 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z} - 4e^{-2z}\left[zx - \frac{x^2}{2}\right]_0^z =$$

$= 1 - (1 + 2z + 2z^2)e^{-2z}$.
Allora: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = (1 + 2z + 2z^2)e^{-2z}\,, \quad f_Z(z) = F_Z'(z) = 4z^2e^{-2z}$
(distribuzione Gamma di parametri $c = 3$, $\lambda = 2$), da cui segue: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4z^2}{1+2z+2z^2}$.

6. Si ha

$$\varphi_M(t) = \mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X+Y+Z}{3}}) = \mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{X}{3}})\mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{Y}{3}})\mathbb{P}(e^{it\cdot\frac{Z}{3}}) = \varphi_X\left(\frac{t}{3}\right)\varphi_Y\left(\frac{t}{3}\right)\varphi_Z\left(\frac{t}{3}\right) =$$

$= \left(e^{-\frac{t^2}{3}}\right)^3 = e^{-t^2}$.
Inoltre:

$$\varphi_M'(t) = -2te^{-t^2}\,, \quad \varphi_M''(t) = -2e^{-t^2} + 4t^2e^{-t^2}\,,$$

con: $\varphi_M'(0) = 0$, $\varphi_M''(0) = -2$. Allora:

$$\mathbb{P}(M) = \frac{\varphi_M'(0)}{i} = 0,\ \mathbb{P}(M^2) = \frac{\varphi_M''(0)}{i^2} = 2\,;$$

pertanto:

$$Var(M) = \mathbb{P}(M^2) - [\mathbb{P}(M)]^2 = 2\,.$$

7. Si ha $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_5,\sigma_5}$, con $\frac{1}{\sigma_5^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{5}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + 20 = \frac{81}{4}$, da cui segue $\sigma_5 = \frac{2}{9}$; inoltre, tenendo conto che $\overline{x} = m_0$, si ha: $m_5 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0 + \frac{5}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{5}{\sigma^2}} = m_0 = 4$. Infine, ricordando che $\Phi_{m,\sigma}(x) = \Phi(\frac{x-m}{\sigma})$, si ha

$$p = P\left(\Theta > \frac{38}{9}\,|\,\mathbf{x}\right) = 1 - P\left(\Theta \leq \frac{38}{9}\,|\,\mathbf{x}\right) = 1 - \Phi_{4,\frac{2}{9}}\left(\frac{38}{9}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\frac{38}{9} - 4}{\frac{2}{9}}\right) = 1 - \Phi(1) \simeq 1 - 0.8413 = 0.1587\,.$$