Probabilità e Statistica (13/02/2017)

(Ing. Civ. - Trasp., Roma)

(esame da 6 crediti: risolvendo correttamente 5 esercizi si ottiene il punteggio massimo)

1. Da un'urna U, contenente 2 palline bianche e 2 nere, si estraggono 2 palline che vengono inserite in un'urna V, contenente inizialmente 1 pallina bianca e 1 nera; successivamente, da V si estraggono in blocco 2 palline. Indicando con X il numero aleatorio di palline bianche estratte da U e con Y il numero aleatorio di palline bianche estratte da V, calcolare $\alpha = P(Y = 2 \,|\, X = 2)$, $\beta = P(X = 0 \,|\, Y = 0)$ e la previsione di Y.

   $\alpha =$ $\beta =$ $\mathbb{P}(Y) =$

2. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo X è $f(x) = a$, per $x \in [0, 2] \cup [3, 5]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante a, la previsione m di X e i valori x tali che $F(x) > \frac{3}{4}$.

   $a =$ $m =$ $x \in$

3. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con distribuzione uniforme sul triangolo T di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$, calcolare la probabilità $p = P(X + Y \leq 1)$, la funzione di ripartizione di Y e la varianza di Y.

   $p =$ $F_Y(y) =$ $Var(Y) =$

4. Dati due numeri aleatori X e Y, con $X \sim N_{m_1,\sigma_1}, Y \sim N_{m_2,\sigma_2}$, calcolare il minimo e il massimo valore possibile della varianza V del numero aleatorio $\frac{X-m_1}{\sigma_1} + \frac{Y-m_2}{\sigma_2}$. Inoltre, supposto $Var\left(\frac{X}{\sigma_1} + \frac{Y}{\sigma_2}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma_1} - \frac{Y}{\sigma_2}\right)$, calcolare il coefficiente di correlazione ρ_{XY}.

   $Min\, V =$ $Max\, V =$ $\rho_{XY} =$

5. Dato un vettore aleatorio continuo (X, Y), con densità $f(x, y) = ye^{-x-y}$ per $x \geq 0, y \geq 0$, e con $f(x, y) = 0$ altrove, stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, posto $Z = X + Y$, calcolare la funzione di sopravvivenza e la funzione di rischio di Z, per $z > 0$.

   Indipendenza ? $S_Z(z) =$ $h_Z(z) =$

6. Da un lotto di 6 componenti, di cui 4 buoni e 2 difettosi, se ne estraggono in blocco 3. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi tra quelli estratti, calcolare la funzione caratteristica e la previsione di X.

   $\varphi_X(t) =$ $\mathbb{P}(X) =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 1,\ \sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$, con $x_1 + \cdots + x_5 = 5$, calcolare (utilizzando la distribuzione finale di Θ) la probabilità p dell'evento condizionato $(\Theta > \frac{19}{7} \,|\, \Theta > \frac{13}{7}; \mathbf{x})$.

   $p =$

Probabilità e Statistica (Ing. Civ. Trasp., Roma)
Soluzioni della prova scritta del 13/02/2017.

1. Condizionatamente all'ipotesi $(X = 2)$ l'urna V contiene 3 palline bianche e 1 nera; allora $\alpha = P(Y = 2 \,|\, X = 2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$. Inoltre $\beta = \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{P(X=0)P(Y=0\,|\,X=0)}{\sum_{r=0}^{2} P(X=r)P(Y=0\,|\,X=r)}$, con $P(X = 0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, $P(X = 1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{4}{6}$, $P(X = 2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{2}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, $P(Y = 0 \,|\, X = 0) = \frac{\binom{1}{0}\binom{3}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2}$, $P(Y = 0 \,|\, X = 1) = \frac{\binom{2}{0}\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$, $P(Y = 0 \,|\, X = 2) = 0$. Pertanto: $\beta = \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot 0} = \frac{3}{7}$. Infine, analogamente al calcolo di $P(Y = 0 \,|\, X = r)$, con $r = 0, 1, 2$, si ha: $P(Y = 1 \,|\, X = 0) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 1 \,|\, X = 1) = \frac{2}{3}$, $P(Y = 1 \,|\, X = 2) = \frac{1}{2}$, $P(Y = 2 \,|\, X = 0) = 0$, $P(Y = 2 \,|\, X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(Y = 2 \,|\, X = 2) = \frac{1}{2}$, da cui si ottiene

$$P(Y = 1) = \sum_{r=0}^{2} P(X = r)P(Y = 1 \,|\, X = r) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{18}\,,$$

$$P(Y = 2) = \sum_{r=0}^{2} P(X = r)P(Y = 2 \,|\, X = r) = \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{36}\,.$$

Pertanto: $\mathbb{P}(Y) = \sum_{k=0}^{2} kP(Y = k) = \sum_{k=1}^{2} kP(Y = k) = 1 \cdot \frac{11}{18} + 2 \cdot \frac{7}{36} = 1$.

2. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^2 adx + \int_3^5 adx = 4a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{4}$. Inoltre

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}xdx + \int_3^5 \frac{1}{4}xdx = \frac{5}{2}\,,$$

come seguirebbe immediatamente osservando che $f(x)$ ha un diagramma simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \frac{5}{2}$. Infine, per $x \in (3, 5)$, $F(x)$ è crescente e si ha

$$F(x) = \int_0^2 \frac{1}{4}dx + \int_3^x \frac{1}{4}dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{1}{4}(x-1)\,,$$

con $F(4) = \frac{3}{4}$ e con $F(x) = 1$ per $x \geq 5$; pertanto: $F(x) > \frac{3}{4}$ per $x > 4$.

3. L'area di T è $\mu(T) = 1$, pertanto: $f(x, y) = \frac{1}{\mu(T)} = 1$, per $(x, y) \in T$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Osservando che l'evento $(X + Y \leq 1)$ coincide con l'evento $[(X, Y) \in T_1]$, dove T_1 è il triangolo di vertici i punti $(0, 0), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, segue

$$p = P(X + Y \leq 1) = P[(X, Y) \in T_1] = \int\int_{T_1} f(x, y)dxdy = \frac{\mu(T_1)}{\mu(T)} = \frac{1}{4}\,.$$

Inoltre, per ogni $y \in (0, 1)$, l'evento $(Y \leq y)$ coincide con l'evento $[(X, Y) \in T_y]$, dove T_y è il trapezio di vertici i punti $(0, 0), (2, 0), (2 - y, y), (y, y)$, con $\mu(T_y) = \frac{(2+2-y-y)y}{2} = 2y - y^2$; pertanto, essendo la distribuzione uniforme, si ha $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[(X, Y) \in T_y] = = \frac{\mu(T_y)}{\mu(T)} = 2y - y^2$; infatti: $P[(X, Y) \in T_y] = \int\int_{T_y} f(x, t)dxdt = \int_0^y dt \int_y^{2-y} dx = 2y - y^2$. Inoltre $F_Y(y) = 0$, per $y \leq 0$, ed $F_Y(y) = 1$, per $y \geq 1$. Infine, $f_Y(y) = F_Y'(y) = 2 - 2y$, per $y \in [0, 1]$, con $f_Y(y) = 0$ altrove; allora

$$\mathbb{P}(Y) = \int_0^1 yf_Y(y)dy = \cdots = \frac{1}{3}\,, \quad \mathbb{P}(Y^2) = \int_0^1 y^2 f_Y(y)dy = \cdots = \frac{1}{6}\,,$$

da cui segue: $Var(Y) = \mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(Y)]^2 = \frac{1}{18}$.

4. Ricordando che

$$Var(aX+b)=a^2Var(X)\,,\quad Var(aX+bY)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)\,,$$

segue: $Var\left(\frac{X-m_1}{\sigma_1}\right)=Var\left(\frac{X}{\sigma_1}\right)=1=Var\left(\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\right)=Var\left(\frac{Y}{\sigma_2}\right)$,

$$Var\left(\frac{X-m_1}{\sigma_1}+\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\right)=Var\left(\frac{X-m_1}{\sigma_1}\right)+Var\left(\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\right)+2\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}=2+2\rho_{XY}\,,$$

con $\rho_{XY}\in[-1,1]$. Allora $Min\,V=0$ e $Max\,V=4$. Inoltre, $Var\left(\frac{X}{\sigma_1}-\frac{Y}{\sigma_2}\right)=2-2\rho_{XY}$; allora: $2+2\rho_{XY}=2-2\rho_{XY}$ se e solo se $\rho_{XY}=0$.

5. Osservando che $\int_0^{+\infty}ye^{-y}dy=1, \int_0^{+\infty}e^{-x}dx=1$, segue

$$f_1(x)=\int_0^{+\infty}ye^{-x-y}dy=e^{-x}\,,\ x\geq 0\,;\quad f_2(y)=\int_0^{+\infty}ye^{-x-y}dx=ye^{-y}\,,\ y\geq 0\,.$$

Pertanto X ha una distribuzione esponenziale, di parametro $\lambda=1$, e Y una distribuzione Gamma, di parametri $c=2,\lambda=1$, con $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ per ogni (x,y); quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti. Inoltre, per ogni fissato $z>0$, l'evento $(X+Y\leq z)$ coincide con l'evento $[(X,Y)\in T_z]$, dove T_z è il triangolo di vertici i punti $(0,0),(z,0),(0,z)$; pertanto, essendo T_z un dominio normale rispetto all'asse y, ovvero $T_z=(x,y):0\leq y\leq z, 0\leq x\leq z-y$, si ha

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)=P[(X,Y)\in T_z]=\int\int_{T_z}f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_0^z dy\int_0^{z-y}e^{-x}ye^{-y}dx=\int_0^z\left(ye^{-y}\int_0^{z-y}e^{-x}dx\right)dy=\int_0^z ye^{-y}(1-e^{-(z-y)})dy=$$

$$=\int_0^z ye^{-y}dy-e^{-z}\int_0^z ydy=[-ye^{-y}]_0^z+\int_0^z e^{-y}dy-\frac{z^2}{2}e^{-z}=\cdots=1-\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)e^{-z}\,.$$

Allora: $S_Z(z)=1-F_Z(z)=\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)e^{-z}$. Infine, $f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{z^2}{2}e^{-z}$, ovvero Z ha una distribuzione Gamma, di parametri $c=3,\lambda=1$ (infatti: $Z\sim G_{1,1}*G_{2,1}=G_{3,1}$), da cui segue: $h_Z(z)=\frac{f_Z(z)}{S_Z(z)}=\frac{\frac{z^2}{2}e^{-z}}{(1+z+\frac{z^2}{2})e^{-z}}=\frac{z^2}{2+2z+z^2}$.

6. Si ha $X\sim H(6,3,\frac{1}{3}), X\in\{0,1,2\}$, con $P(X=h)=p_h=\frac{\binom{2}{h}\binom{4}{3-h}}{\binom{6}{3}}$; quindi $p_0=\frac{1}{5},p_1=\frac{3}{5},p_2=\frac{1}{5}$. Allora: $\varphi_X(t)=\mathbb{P}(e^{itX})=\sum_{h=0}^2 p_he^{ith}=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}e^{it}+\frac{1}{5}e^{2it}$, con $\varphi_X'(t)=\frac{3}{5}ie^{it}+\frac{2}{5}ie^{2it}$. Pertanto: $\mathbb{P}(X)=\frac{\varphi_Z'(0)}{i}=\frac{(\frac{3}{5}+\frac{2}{5})i}{i}=1$.
(*in alternativa:* $\mathbb{P}(X)=np=3\cdot\frac{1}{3}=1=\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{1}{5}\cdot 2$.)

7. Si ha $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{m_5,\sigma_5}$, con $\frac{1}{\sigma_5^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{5}{\sigma^2}=\frac{1}{9}+\frac{5}{4}=\frac{49}{36}$, e quindi $\sigma_5=\frac{6}{7}$, e con $m_5=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0+\frac{5}{\sigma^2}\cdot\overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{5}{\sigma^2}}=m_0=1$, in quanto $\overline{x}=m_0=1$. Pertanto, per la distribuzione finale risulta $\Theta\mid\mathbf{x}\sim N_{1,\frac{6}{7}}$. Allora, osservando che $P\left(\Theta>\frac{19}{7}\mid\Theta>\frac{13}{7};\mathbf{x}\right)=\frac{P(\Theta>\frac{19}{7}\mid\mathbf{x})}{P(\Theta>\frac{13}{7}\mid\mathbf{x})}$, si ha: $p=P\left(\Theta>\frac{19}{7}\mid\Theta>\frac{13}{7};\mathbf{x}\right)=\frac{P(\Theta>\frac{19}{7}\mid\mathbf{x})}{P(\Theta>\frac{13}{7}\mid\mathbf{x})}=\frac{1-\Phi_{1,\frac{6}{7}}(\frac{19}{7})}{1-\Phi_{1,\frac{6}{7}}(\frac{13}{7})}=\frac{1-\Phi(2)}{1-\Phi(1)}\simeq\frac{1-0.9772}{1-0.8413}\simeq 0.1437$.