**Probabilità e Statistica** (20/03/2017)

*(Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr., Roma)*

*(esame da 6 crediti: 5 esercizi su 7; esame da 3-4 crediti: esercizi 1,2,3,4)*

1. Da un'urna contenente 2 palline bianche e 2 nere vengono estratte a caso tutte le palline. Tizio vince un premio se le ultime due palline sono bianche (evento $A$), Caio vince un premio se le ultime due palline sono nere (evento $B$). Posto $E_i =$ *"l'i-ma pallina estratta è bianca"*, $i = 1, 2, 3, 4$, calcolare: (i) la probabilità $p$ che il premio venga vinto da Tizio oppure da Caio; (ii) la probabilità $\alpha$ che il premio venga vinto da Tizio oppure da Caio supposto che la prima pallina sia bianca e la quarta sia nera.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $\alpha =$

   .

2. Dati due numeri aleatori $X$ e $Y$, entrambi con distribuzione normale di parametri $m, \sigma$, con coefficiente di correlazione $\rho = 0$, calcolare il valore positivo $a$ tale che la varianza del numero aleatorio $Z = aX - aY$ sia pari a 1. Inoltre, supposto che la distribuzione di $Z$ sia di tipo normale, calcolare la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(-2 \leq Z \leq -1 \,|\, Z \leq 0)$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$

3. La densità di probabilità di un numero aleatorio continuo $X$ è $f(x) = a$, per $x \in [0, 1] \cup [4, 5]$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare la costante $a$, la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(X > \frac{9}{2} \,|\, X > \frac{1}{2})$ e il valore $x_0$ tale che $F(x_0) = \frac{3}{4}$.

   $a =$ $\qquad\qquad$ $p =$ $\qquad\qquad$ $x_0 =$

4. Dato un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$, con distribuzione uniforme sul triangolo $T$ di vertici i punti $(2, 0), (0, 2), (2, 2)$, calcolare la probabilità $p = P(X + Y > 3)$, la funzione di ripartizione di $X$ e la varianza di $X$.

   $p =$ $\qquad\qquad$ $F_X(x) =$ $\qquad\qquad$ $Var(X) =$

5. Da un'urna contenente 4 palline bianche e 2 nere si effettuano 9 estrazioni con restituzione, ottenendo un numero aleatorio $X$ di palline bianche. Calcolare la funzione caratteristica di $X$, la varianza di $X$ e la probabilità $p$ dell'evento condizionato $(X > 8 \,|\, X \geq 8)$.

   $\varphi_X(t) =$ $\qquad\qquad$ $Var(X) =$ $\qquad\qquad$ $p =$

6. Per far funzionare un'apparecchiatura $M$ sono disponibili due dispositivi simili $A$ e $B$, con $B$ che viene utilizzato quando si guasta $A$. Le durate aleatorie fino al guasto di $A$ e $B$ sono due numeri aleatori $X$ e $Y$, con densità congiunta $f(x, y) = ce^{-2x-2y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante positiva $c$ e stabilire se $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti. Calcolare inoltre, per ogni $z > 0$, la funzione di rischio $h_Z(z)$ del tempo aleatorio $Z = X + Y$ di durata fino al guasto di $M$.

   $c =$ $\qquad\qquad$ *Indipendenza ?* $\qquad\qquad$ $h_Z(z) =$

7. Un operatore prende a caso un lotto da un insieme di 4 lotti, uno dei quali contiene 4 pezzi difettosi e 1 buono, mentre gli altri 3 lotti contengono 1 pezzo difettoso e 4 buoni. Successivamente, l'operatore esamina a caso tutti i pezzi del lotto. Definiti gli eventi $H =$ *"il lotto utilizzato dall'operatore contiene 4 pezzi difettosi e 1 buono"*, $E_i =$ *"l'i-mo pezzo estratto è difettoso"*, $i = 1, 2, 3$, calcolare: (i) $P(H|E_1^c E_2)$; (ii) $P(E_2|E_3)$.

   $P(H|E_1^c E_2) =$ $\qquad\qquad$ $P(E_2|E_3) =$

**Probabilità e Statistica** (Ing. Civ. - Trasp. - Amb. Terr., Roma)
*Soluzioni della prova scritta del 20/03/2017.*

1. L'evento $A$ coincide con $E_3E_4$ e si verifica se e solo se si verifica l'evento $E_1^cE_2^c$; pertanto $P(A) = P(E_3E_4) = P(E_1^cE_2^c) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. In modo analogo, $B$ coincide con $E_3^cE_4^c$ e si verifica se e solo se si verifica $E_1E_2$; pertanto $P(B) = P(E_3^cE_4^c) = P(E_1E_2) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Inoltre, $A$ e $B$ sono incompatibili e quindi $p = P(A\vee B) = P(A)+P(B) = \frac{1}{3}$. Infine, osservando che $E_1E_4^c = E_1E_2E_3^cE_4^c \vee E_1E_2^cE_3E_4^c$ e che $E_1E_3^cE_4^c = E_1E_2E_3^cE_4^c$, si ha
$$(A\vee B)\wedge E_1E_4^c = (E_3E_4\vee E_3^cE_4^c)\wedge E_1E_4^c = E_1E_3^cE_4^c = E_1E_2E_3^cE_4^c\,,$$
da cui segue
$$\alpha = P(A\vee B\,|\,E_1E_4^c) = \frac{P(E_1E_2E_3^cE_4^c)}{P(E_1E_2E_3^cE_4^c)+P(E_1E_2^cE_3E_4^c)} = \frac{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1}{\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1+\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = \frac{1}{2}\,.$$

2. Ricordando la formula $Var(aX+bY) = a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y)$ e osservando che $Cov(X,Y)=0$, segue: $Var(aX-aY) = a^2Var(X)+a^2Var(Y) = 2a^2\sigma^2 = 1$, con $a>0$, se e solo $a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$. Pertanto: $Z = \frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}$, con $\mathbb{P}(Z) = \frac{\mathbb{P}(X)-\mathbb{P}(Y)}{\sqrt{2}\sigma} = \frac{m-m}{\sqrt{2}\sigma} = 0$ e $Var(Z)=1$. Allora, se $Z\sim N_{m_Z,\sigma_Z}$, si ha: $m_Z = 0, \sigma_Z = 1$; inoltre
$$P(Z\leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}\,,\quad P(Z\leq 1) = \Phi(1)\simeq 0.8413\,,\quad P(Z\leq 2) = \Phi(2)\simeq 0.9772\,.$$
Pertanto
$$P(-2\leq Z\leq -1\,|\,Z\leq 0) = \frac{P(-2\leq Z\leq -1, Z\leq 0)}{P(Z\leq 0)} = \frac{P(-2\leq Z\leq -1)}{P(Z\leq 0)} =$$
$$= \frac{\Phi(-1)-\Phi(-2)}{\Phi(0)} = \frac{1-\Phi(1)-1+\Phi(2)}{\Phi(0)} = \frac{\Phi(2)-\Phi(1)}{\Phi(0)} \simeq \frac{0.9772-0.8413}{0.5} = 0.2718\,.$$

3. Si ha: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 a dx + \int_4^5 a dx = 2a = 1$; pertanto: $a = \frac{1}{2}$. Inoltre
$$p = P\left(X>\frac{9}{2}\ |\ X>\frac{1}{2}\right) = \frac{P(X>\frac{9}{2}, X>\frac{1}{2})}{P(X>\frac{1}{2})} = \frac{P(X>\frac{9}{2})}{P(X>\frac{1}{2})} = \frac{\int_{\frac{9}{2}}^5 \frac{1}{2}dx}{1-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dx} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}\,.$$
Infine, per $x\in(4,5)$, $F(x)$ è crescente e si ha
$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{2}dx + \int_4^x \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(x-4) = \frac{1}{2}(x-3)\,,$$
con $F(4) = \frac{1}{2}$ e con $F(x) = 1$ per $x\geq 5$; pertanto: $F(x_0) = \frac{3}{4}$ se e solo se $\frac{1}{2}(x_0-3) = \frac{3}{4}$, da cui segue: $x_0 = \frac{9}{2}$.

4. L'area di $T$ è $\mu(T) = 2$, pertanto: $f(x,y) = \frac{1}{\mu(T)} = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Osservando che l'evento $(X+Y>3)$ coincide con l'evento $[(X,Y) \in A]$, dove $A$ è il triangolo di vertici i punti $(1,2),(2,1),(2,2)$, segue
$$p = P(X+Y>3) = P[(X,Y) \in A] = \int\int_A f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\int\int_A dxdy = \frac{\mu(A)}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}.$$
Inoltre $X \in [0,2]$ e, per ogni $x \in (0,2)$, indicando con $T_x$ il triangolo di vertici i punti $(x, 2-x), (x,2), (0,2)$, si ha
$$F_X(x) = P(X \leq x) = P[(X,Y) \in T_x] = \int\int_{T_x} f(t,y)dtdy = \frac{\mu(T_x)}{2} = \frac{x^2}{4},$$
con $F_X(x) = 0$, per $x \leq 0$, ed $F_X(x) = 1$, per $x \geq 2$. Infine, $f_X(x) = F_X'(x) = \frac{x}{2}$, per $x \in [0,2]$, con $f_X(x) = 0$ altrove; allora: $\mathbb{P}(X) = \int_0^2 x f_X(x)dx = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \frac{4}{3}$, $\mathbb{P}(X^2) = \int_0^2 x^2 f_X(x)dy = \int_0^2 \frac{x^3}{2}dx = 2$, da cui segue: $Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = \frac{2}{9}$.

5. Si ha $X \sim B(9, \frac{2}{3}), X \in \{0,1,\ldots,9\}$, con $P(X=h) = p_h = \binom{9}{h}(\frac{2}{3})^h(\frac{1}{3})^{9-h}$. Allora
$$\varphi_X(t) = \sum_{h=0}^{9} p_h e^{ith} = \sum_{h=0}^{9} \binom{9}{h}\left(\frac{2}{3}\right)^h \left(\frac{1}{3}\right)^{9-h} e^{ith} = \sum_{h=0}^{9} \binom{5}{h}\left(\frac{2}{3}e^{it}\right)^h \left(\frac{1}{3}\right)^{9-h} = \left(\frac{2}{3}e^{it} + \frac{1}{3}\right)^9;$$
infatti, per un numero aleatorio $X$ con distribuzione binomiale $B(n,p)$, si ha: $\varphi_X(t) = (p\,e^{it} + q)^n$. Inoltre: $Var(X) = npq = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = 2$. Infine, osservando che $(X > 8)$ implica $(X \geq 8)$, si ha $(X>8) \wedge (X \geq 8) = (X > 8)$; pertanto
$$p = \frac{P(X>8)}{P(X \geq 8)} = \frac{P(X=9)}{P(X=8)+P(X=9)} = \frac{(\frac{2}{3})^9}{9(\frac{2}{3})^8 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3})^9} = \frac{\frac{2}{3}}{9 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{2}{11}.$$

6. Si ha: $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ce^{-2x-2y}dxdy = \frac{c}{4}\int_0^{+\infty} 2e^{-2x}dx \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy = \frac{c}{4} = 1$; pertanto: $c = 4$. Inoltre: $f_1(x) = \int_0^{+\infty} 4e^{-2x-2y}dy = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$; $f_2(y) = \cdots = 2e^{-2y}$, $y \geq 0$ (sia $X$ che $Y$ hanno una distribuzione esponenziale, di parametro $\lambda = 2$). Inoltre $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ per ogni $(x,y)$ e quindi $X$ e $Y$ sono stocasticamente indipendenti. Infine, fissato $z > 0$ e indicato con $T_z$ il triangolo di vertici i punti $(0,0),(z,0),(0,z)$, si ha: $F_Z(z) = P(Z \leq z) =$
$$= P(X+Y \leq z) = \int\int_{T_z} f(x,y)dxdy = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 4e^{-2x}e^{-2y}dy = \cdots = 1 - e^{-2z} - 2ze^{-2z}.$$
Allora: $S_Z(z) = 1 - F_Z(z) = (1+2z)e^{-2z}$. Infine, $f_Z(z) = F_Z'(z) = 4ze^{-2z}$, ovvero $Z$ ha una distribuzione Gamma, di parametri $c = \lambda = 2$ (infatti: $Z \sim G_{1,2} * G_{1,2} = G_{2,2}$), da cui segue: $h_Z(z) = \frac{f_Z(z)}{S_Z(z)} = \frac{4ze^{-2z}}{(1+2z)e^{-2z}} = \frac{4z}{1+2z}$.

7. Si ha $P(E_1^c E_2|H) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{5}$, $P(E_1^c E_2|H^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$, $P(H) = \frac{1}{4}$; quindi
$$P(E_1^c E_2) = P(E_1^c E_2|H)P(H) + P(E_1^c E_2|H^c)P(H^c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{5}.$$
Allora: $P(H|E_1^c E_2) = \frac{P(E_1^c E_2|H)P(H)}{P(E_1^c E_2)} = \frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{4} = P(H)$. Inoltre, gli eventi $E_i$ sono scambiabili, con $P(E_i) = P(E_1) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$, e con
$$P(E_i E_j) = P(E_1 E_2) = P(E_1 E_2|H)P(H) + P(E_1 E_2|H^c)P(H^c) = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{20};$$
quindi: $P(E_2|E_3) = \frac{P(E_2 E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1 E_2)}{P(E_1)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{7}{20}} = \frac{3}{7} > \frac{7}{20} = P(E_2)$.