**Calcolo delle probabilità** (3/7/2001)

*(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)*

1. La distribuzione di probabilità di un numero aleatorio $X$ non negativo soddisfa la condizione $P(X > x + y | X > y) = P(X > x), \; \forall \, x > 0, y > 0$ . Inoltre la previsione di $X$ è $\frac{1}{4}$. Determinare, per ogni $x \geq 0$, la funzione di ripartizione $F(x)$.
   *Risp.:* $F(x) =$

2. Da un lotto contenente 5 barre di acciaio viene scelta a caso una barra. Utilizzando opportune unità di misura, i valori $(x_i, y_i), i = 1, ..., 5$, delle lunghezze e dei pesi delle 5 barre sono :
   $$(1, 1.5), \quad (1.2, 1.8), \quad (1.4, 2.1), \quad (1.5, 2.25), \quad (0.8, 1.2).$$
   Indicando con $(X, Y)$ i valori aleatori della lunghezza e del peso della barra estratta, calcolare il coefficiente di correlazione di $X, Y$.
   *Risp.:* $\rho =$

3. Con riferimento all'esercizio precedente, stabilire se gli eventi $(X > 1)$ e $(Y > 2)$ sono indipendenti.
   *Risp.:* *Indipendenti*?

4. Un'azienda possiede 10 autobus ognuno dei quali la mattina, indipendentemente dagli altri autobus, con una certa probabilità $p$ riesce a mettersi in moto. Calcolare la probabilità $\alpha$ che, in una data mattina, almeno un autobus riesca a partire.
   *Risp.:* $\alpha =$

5. Un numero aleatorio $X$ ha distribuzione normale con parametri $m = 3, \sigma = 2$. Posto $Y = aX + b$, con $a > 0$, determinare i valori di $a$ e $b$ tali che risulti
   $$P(Y > 1.96) \; = \; P(Y < -1.96) \; \simeq \; 0.025 \, .$$
   *Risp.:* $a =$ $\qquad\qquad$ $b =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è data da $f(x, y) = 6e^{-(3x+2y)}$, per $x \geq 0, \; y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la previsione $\mu$ di $3X - 2Y$.
   *Risp.:* $\mu =$

7. Considerato il triangolo $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \; x \leq y \leq 1\}$, sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio con densità $f(x, y) = 6(y - x)$, per $(x, y) \in T$, e zero altrove. Calcolare la densità condizionata $f_2(y|x)$ di $Y|x$.
   *Risp.:* $f_2(y|x) =$

8. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori $X, Y$ indipendenti sono rispettivamente $\phi_X(t) = e^{2(e^{it}-1)}$ e $\phi_Y(t) = e^{3(e^{it}-1)}$. Posto $Z = X + Y$, calcolare la previsione $m$ di $Z$.
   *Risp.:* $m =$

**Calcolo delle probabilità**

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 3/7/2001.*

1. La condizione $P(X > x + y|X > y) = P(X > x), \ \forall \ x > 0, y > 0$ è soddisfatta se e solo se $X$ ha distribuzione esponenziale. In tale caso, la funzione di ripartizione è data da $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ x \geq 0$. Tenendo conto che la previsione di $X$ è $\frac{1}{\lambda}$, si ha: $F(x) = 1 - e^{-4x}, \ x \geq 0$.

2. In generale, occorrerebbe applicare la formula $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$, calcolando preliminarmente la covarianza e gli scarti quadratici medi. $X, Y$ e $XY$ hanno distribuzione uniforme, rispettivamente, sugli insiemi $\{0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.5\}$, $\{1.2, 1.5, 1.8, 2.1, 2.25\}$ e $\{0.96, 1.5, 2.16, 2.94, 3.375\}$, e quindi le previsioni di $X, Y$ e $XY$ sono, rispettivamente, 1.18, 1.77 e 2.187. Quindi $Cov(X,Y) = 0.0984$. Inoltre, le previsioni di $X^2, Y^2$ sono, rispettivamente, 1.458 e 3.2805 da cui si ottiene $\sigma_X = 0.256...$, $\sigma_Y = 0.384...$ . Pertanto $\rho = 1$.
   Lo stesso risultato si ottiene direttamente osservando che, per ogni $(x_i, y_i)$, si ha $y_i = \frac{3}{2} x_i$ e quindi $Y = \frac{3}{2} X$, da cui segue $\rho = 1$.

3. Si ha:
   $$P(X > 1) = 1 - P(X = 0.8) - P(X = 1) = \tfrac{3}{5},$$
   $$P(Y > 2) = P(Y = 2.1) + P(Y = 2.25) = \tfrac{2}{5},$$
   $$P(X > 1, Y > 2) = P(X = 1.4, Y = 2.1) + P(X = 1.5, Y = 2.25) = \tfrac{2}{5}.$$
   Poichè $P(X > 1, Y > 2) \neq P(X > 1)P(Y > 2)$, gli eventi $(X > 1)$ e $(Y > 2)$ non sono indipendenti.

4. Il numero aleatorio $X$ di autobus che partono in una data mattina ha una distribuzione binomiale di parametri $10, p$. Allora:
   $$\alpha = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^{10} = 1 - q^{10}.$$

5. $Y$ ha distribuzione normale con parametri $m_Y = 3a + b, \sigma_Y = 2a$. Si ha

$$P(Y > 1.96) = 1 - P(Y \leq 1.96) = 1 - \Phi_{m_Y,\sigma_Y}(1.96) = 1 - \Phi(\frac{1.96 - m_Y}{\sigma_Y}) \simeq 0.025,$$

da cui segue $\Phi(\frac{1.96-m_Y}{\sigma_Y}) \simeq 0.975$ e quindi $\frac{1.96-m_Y}{\sigma_Y} = 1.96$. Inoltre

$$P(Y < -1.96) = \Phi_{m_Y,\sigma_Y}(-1.96) = \Phi(\frac{-1.96 - m_Y}{\sigma_Y}) = 1 - \Phi(\frac{1.96 + m_Y}{\sigma_Y}) \simeq 0.025,$$

da cui segue $\Phi(\frac{1.96+m_Y}{\sigma_Y}) \simeq 0.975$ e quindi $\frac{1.96+m_Y}{\sigma_Y} = 1.96$.
Dalle seguenti equazioni lineari (nelle incognite $m_Y, \sigma_Y$)

$$\frac{1.96 - m_Y}{\sigma_Y} = 1.96 \ , \qquad \frac{1.96 + m_Y}{\sigma_Y} = 1.96$$

si ottiene $m_Y = 0, \ \sigma_Y = 1$, e quindi $a = \frac{1}{2}, \ b = -\frac{3}{2}$.
In altri termini $Y$ è uguale al numero aleatorio ridotto $\frac{X-3}{2}$.

6. Si ha:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \cdots = 3e^{-3x}, \ x \geq 0,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \cdots = 2e^{-2y}, \ y \geq 0,$$

cioè $X$ e $Y$ hanno distribuzione di tipo esponenziale e quindi $m_X = \frac{1}{3}, \ m_Y = \frac{1}{2}$. Allora

$$\mu = 3m_X - 2m_Y = 3 \cdot \frac{1}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

7. Si ha:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_x^1 6(y-x)dy = 6[\tfrac{y^2}{2} - xy]_x^1 =$$

$$= 6(\tfrac{1}{2} - x - \tfrac{x^2}{2} + x^2) = 3(x-1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Allora:

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{6(y-x)}{3(x-1)^2} = \frac{2(y-x)}{(x-1)^2}, \quad x \leq y \leq 1.$$

8. Si ha:

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = e^{2(e^{it}-1)}e^{3(e^{it}-1)} = e^{5(e^{it}-1)},$$

da cui ricordando che $\phi_Z'(0) = im_Z$ e osservando che

$$\phi_Z'(t) = e^{5(e^{it}-1)}5e^{it}i, \quad \phi_Z'(0) = 5i,$$

segue: $m_Z = 5$. In effetti, $e^{5(e^{it}-1)}$ è la funzione caratteristica di una distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 5$.

**Calcolo delle probabilità** (13/6/2001)

*(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)*

1. In una ditta che vende dispositivi di un certo tipo il 60 % proviene da una fabbrica $A$, il 30 % da una fabbrica $B$ e il 10 % da $C$. Le percentuali di lampadine difettose prodotte da $A, B, C$ sono rispettivamente il 2 %, il 4 % e il 5 %. Calcolare la probabilità $\alpha$ che un dispositivo venduto dalla ditta e risultato difettoso sia stato prodotto da $C$.
   *Risp.:* $\alpha =$

2. Le funzioni caratteristiche di due numeri aleatori $X, Y$ indipendenti sono rispettivamente $\phi_X(t) = (\frac{e^{it}}{2}+\frac{1}{2})^2$ e $\phi_Y(t) = (\frac{e^{it}}{2}+\frac{1}{2})^3$. Posto $Z = X+Y$, calcolare la probabilità dell'evento $(Z \geq 1)$.
   *Risp.:* $P(Z \geq 1) =$

3. Dati 3 eventi $A, B, C$, con $A^c B^c C^c = \emptyset$, verificare se le valutazioni di probabilità $P(A) = \frac{1}{10}, P(B) = \frac{3}{10}, P(C) = \frac{5}{10}$ sono coerenti.
   *Risp.:* *Coerenti?*

4. Un numero aleatorio $X$ non negativo ha una funzione di sopravvivenza $S(x) = e^{-2x+\frac{ax^2}{2}}$, per ogni $x \geq 0$. Stabilire per quale valore di $a$ è soddisfatta la condizione

$$P(X > x+y | X > y) = P(X > x), \ \forall\, x > 0, y > 0.$$

   *Risp.:* $a =$

5. Da un'urna, contenente 3 palline numerate da 0 a 2, si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Indicando con (X,Y) il vettore aleatorio dei valori osservati, calcolare l'equazione della retta di regressione di $Y$ su $X$.
   *Risp.:* $y =$

6. Dato un campione casuale $(X_1, \dots, X_5)$, le cui componenti hanno distribuzione normale con valor medio $\Theta$ incognito e varianza $\sigma^2 = 1$, si supponga che la distribuzione iniziale di $\Theta$ sia normale con parametri $m_0 = 0, \sigma_0 = 2$. Avendo osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_5)$ con $x_1 + \dots + x_5 = 0$, calcolare il valore $\theta_0$ tale che $P(-\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 \mid \mathbf{x}) \simeq 0.6826$.
   *Risp.:* $\theta_0 =$

7. Sia $f(x,y) = \frac{3}{8}(x+y)$, per $(x,y) \in \mathcal{C} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2-x\}$, con $f(x,y) = 0$ altrove, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$. Calcolare per ogni $x \in [0,2]$ la funzione di ripartizione $F_1(x)$ di $X$.
   *Risp.:* $F_1(x) =$

8. Con riferimento all'esercizio 7, calcolare la probabilità $p$ dell'evento $(X > 1) \vee (Y > 1)$.
   *Risp.:* $p =$

**Calcolo delle probabilità**

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 13/6/2001.*

1. Indicando con $D$ l'evento *"il dispositivo è difettoso"*, si ha

$$P(D|A) = 0.02, \quad P(D|B) = 0.04, \quad P(D|C) = 0.05,$$

con $P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.3, \quad , P(C) = 0.1$. Allora

$$\alpha = P(C|D) = \frac{P(D|C)P(C)}{P(D|A)P(A)+P(D|B)P(B)+P(D|C)P(C)} = \frac{0.05\times 0.1}{0.02\times 0.6+0.04\times 0.3+0.05\times 0.1} = \frac{5}{29}.$$

2. Ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione binomiale di parametri $n, p$ è $(pe^{it} + q)^n$ e che, per l'indipendenza di $X, Y$, si ha $\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = (\frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2})^5$, si ottiene per $Z$ una distribuzione binomiale di parametri $5, \frac{1}{2}$. Allora

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z = 0) = 1 - (\frac{1}{2})^5 = \frac{31}{32}.$$

3. Essendo $A^c B^c C^c = \emptyset$, dalle formule di De Morgan segue $A \vee B \vee C = \Omega$ e quindi $P(A \vee B \vee C) = 1$. D'altra parte, dev'essere:

$$P(A \vee B \vee C) \ \leq \ P(A) + P(B) + P(C) \ = \ \frac{9}{10} \ < \ 1 \ ,$$

il che è assurdo. Pertanto le valutazioni non sono coerenti.

4. La condizione

$$P(X > x + y | X > y) = P(X > x), \ \forall \, x > 0, y > 0$$

rappresenta la proprietà di assenza di memoria ed è caratteristica della distribuzione esponenziale, la cui funzione di sopravvivenza è del tipo $S(x) = e^{-\lambda x}$. Pertanto dev'essere $a = 0$, cui corrisponde $S(x) = e^{-2x}$, ovvero una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$.

5. Com'è facile verificare $(X, Y)$ ha distribuzione uniforme sull'insieme

$$\{(0,1), \ (0,2), \ (1,0), \ (1,2), \ (2,0), \ (2,1)\} \ ,$$

mentre $X$ ed $Y$ hanno distribuzione uniforme sull'insieme $\{0, 1, 2\}$. Allora, si ha $XY \in \{0, 2\}$, con $P(XY = 0) = \frac{2}{3}$ e $P(XY = 2) = \frac{1}{3}$. Quindi la previsione di $XY$ è $\frac{2}{3}$, mentre $X$ e $Y$ hanno previsione uguale a 1. Pertanto: $Cov(X, Y) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$. Inoltre, $X^2$ e $Y^2$ hanno previsione uguale a $\frac{5}{3}$, da cui segue $Var(X) = Var(Y) = \frac{2}{3}$. Allora $\rho = -\frac{1}{2}$ e quindi la retta di regressione di $Y$ su $X$ è: $y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$, cioè: $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

6. La distribuzione finale di $\Theta$ è ancora normale con parametri:

$$m_n = m_5 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{5}{1} \cdot 0}{\frac{1}{4} + \frac{5}{1}} = 0 \,, \qquad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_5^2} = \frac{1}{4} + \frac{5}{1} = \frac{21}{4} \,,$$

e quindi: $\sigma_5 = \frac{2}{\sqrt{21}}$. Allora, essendo:

$$P(-\theta_0 \leq \Theta \leq \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi_{m_5,\sigma_5}(\theta_0) - \Phi_{m_5,\sigma_5}(-\theta_0) = \Phi(\tfrac{\theta_0 - m_5}{\sigma_5}) - \Phi(\tfrac{-\theta_0 - m_5}{\sigma_5}) =$$

$$= 2\Phi(\tfrac{\sqrt{21}}{2}\theta_0) - 1 \simeq 0.6826,$$

segue: $\Phi(\frac{\sqrt{21}}{2}\theta_0) \simeq 0.8413$, e dalle tavole della normale standard si ottiene: $\theta_0 = \sigma_5 = \frac{2}{\sqrt{21}}$.

7. Si ha:

$$F_1(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \int_x^2 du \int_0^{2-u} \tfrac{3}{8}(u+v)dv = 1 - \tfrac{3}{8}\int_x^2 [uv + \tfrac{v^2}{2}]_0^{2-u} du =$$

$$= 1 - \tfrac{3}{8}\int_x^2 [u(2-u) + \tfrac{(2-u)^2}{2}]du = 1 - \tfrac{3}{8}\int_x^2 (2 - \tfrac{u^2}{2})du = 1 - \tfrac{3}{8}[2u - \tfrac{u^3}{6}]_x^2 = 1 - \tfrac{3}{8}(\tfrac{8}{3} - 2x + \tfrac{x^3}{6}) =$$

$$= \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{16}x^3, \;\; 0 \leq x \leq 2 \,.$$

8. Si ha:

$$P[(X > 1) \vee (Y > 1)] = 1 - P(X \leq 1, Y \leq 1) = 1 - \int_0^1 dx \int_0^1 \tfrac{3}{8}(x+y)dy =$$

$$= 1 - \tfrac{3}{8}\int_0^1 [xy + \tfrac{y^2}{2}]_0^1 dx = 1 - \tfrac{3}{8}\int_0^1 (x + \tfrac{1}{2})dx = 1 - \tfrac{3}{8}[\tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x}{2}]_0^1 =$$

$$= 1 - \tfrac{3}{8}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{8}.$$

**Calcolo delle probabilità** (12/2/2001)

*(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)*

1. Un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme nell'insieme di punti $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq -x + 1\}$. Calcolare la previsione condizionata $m_Y(x)$ del numero aleatorio $Y|x$.
   *Risp.:* $m_Y(x) =$

2. Date tre urne $A$ (contenente 3 palline bianche e 1 nera), $B$ (contenente 1 pallina bianca e 3 nere) e $C$ (contenente 1 pallina bianca e 1 nera), da $C$ si estrae una pallina. Se è bianca (evento $H$) viene effettuata una seconda estrazione da $A$, in caso contrario (evento $H^c$) da $B$. Posto $E =$ *"la seconda pallina estratta è nera"*, calcolare la probabilità che la prima pallina estratta sia bianca, supposto di aver osservato pallina nera nella seconda.
   *Risp.:* $P(H|E) =$

3. La funzione caratteristica di un numero aleatorio $X$ è $\phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Calcolare la densità di probabilità $g(y)$ di $Y = 2X$.
   *Risp.:* $g(y) =$

4. Date due urne $U$ (contenente 2 palline bianche e 3 nere) e $V$ (contenente 4 palline bianche e 1 nera), si consideri il seguente esperimento aleatorio. Piero effettua un'estrazione da $U$, vincendo una somma $S$ se esce pallina bianca (evento $A$). In tal caso l'esperimento termina. In caso contrario, Carlo effettua tre estrazioni con restituzione da $V$ e vince la somma $S$ se almeno una volta esce pallina bianca. Sia $E_i$ l'evento *"nell'i-ma prova viene estratta pallina bianca"* e $B$ l'evento *"Carlo vince la somma $S$"*. Calcolare $P(B)$.
   *Risp.:* $P(B) =$

5. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è data da $f(x, y) = e^{-k(x+y)}$, per $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2x$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante $k$.
   *Risp.:* $k =$

6. Dato un vettore aleatorio discreto $(X, Y)$, sia $\mathcal{C} = \{(0, 0),\ (1, -1),\ (1, 1),\ (4, -2),\ (4, 2)\}$ l'insieme dei suoi possibili valori. Indicando con $p(x, y)$ la probabilità dell'evento $(X = x, Y = y)$, si assuma: $p(0, 0) = 0.4$ ; $p(1, -1) = p(1, 1) = a$ ; $p(4, -2) = p(4, 2) = b$ . Stabilire se esiste almeno una coppia $(a, b)$ tale la valutazione $P(X + Y \leq 4) = 0.8$ è coerente.
   *Risp.:*

7. Dato un campione casuale $(X_1, \ldots, X_5)$, le cui componenti hanno distribuzione normale con valor medio $\Theta$ incognito e varianza $\sigma^2 = 2$, si supponga che la distribuzione iniziale di $\Theta$ sia normale con parametri $m_0 = 0, \sigma_0 = 3$. Avendo osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_5)$ con $x_1 + \ldots + x_5 = 5$, calcolare il valore $\theta_0$ tale che $P(\Theta > \theta_0|\mathbf{x}) = \Phi(1) \simeq 0.8413$.
   *Risp.:* $\theta_0 =$

8. Un vettore aleatorio $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme nell'insieme di punti $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq -x + 2\}$. Calcolare la probabilità $p$ dell'evento $(X \leq \frac{1}{2}) \vee (Y \leq \frac{1}{2})$.
   *Risp.:* $p =$

**Calcolo delle probabilità**

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 12/2/2001.*

1. Si ha: $f(x,y) = 2$, per $(x,y) \in T$, e zero altrove. Segue:

$$f_1(x) = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x), \;\; 0 \le x \le 1,$$

e quindi:

$$f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{1-x} \;, \;\; 0 \le y \le 1-x \;.$$

Pertanto $Y|x$ ha distribuzione uniforme in $[0, 1-x]$ e quindi $m_Y(x) = \frac{1-x}{2}$.

2. Si ha:

$$P(H) = \frac{1}{2} \;, \;\; P(E|H) = \frac{1}{4} \;, \;\; P(E|H^c) = \frac{3}{4} \;,$$

da cui segue:

$$P(E) = P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \;,$$

e quindi: $P(H|E) = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

3. Alla funzione caratteristica $e^{-\frac{t^2}{2}}$ corrisponde una distribuzione normale standard. Pertanto $Y$ ha distribuzione normale, con parametri $m_Y = 0$, $\sigma_Y = 2$, e si ha:

$$g_(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{8}} \;, \qquad \phi_Y(t) = e^{-2t^2} \;.$$

4. Si ha:

$$P(A) = P(E_1) = \frac{2}{5} \;, \qquad B = A^c \wedge (E_2 \vee E_3 \vee E_4) \;,$$

da cui:

$$P(B) = P(A^c) P(E_2 \vee E_3 \vee E_4 | A^c) = P(A^c)[1 - P(E_2^c E_3^c E_4^c | A^c)] =$$

$$= \tfrac{3}{5}[1 - (\tfrac{4}{5})^3] = \tfrac{3}{5}(1 - \tfrac{64}{125}) = \tfrac{183}{625} \;.$$

5. Dev'essere: $\int_0^\infty dx \int_0^{2x} f(x,y)dy = 1$ , e quindi:

$$\int_0^\infty dx \int_0^{2x} e^{-k(x+y)} dy = \int_0^\infty e^{-kx} dx \int_0^{2x} e^{-ky} dy = \int_0^\infty e^{-kx} \tfrac{1}{k}[1 - e^{-2kx}]dx =$$

$$\tfrac{1}{k} \int_0^\infty [e^{-kx} - e^{-3kx}]dx = \tfrac{1}{k^2} - \tfrac{1}{3k^2} = 1 \;.$$

Allora: $3k^2 = 2$ , da cui: $k = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

6. Dev'essere: $0.4 + 2a + 2b = 1$, e quindi: $a + b = 0.3$. Inoltre, si ha:

$$P(X+Y=0) = 0.4 + a \ , \quad P(X+Y=2) = a+b \ , \quad P(X+Y=6) = b \ .$$

Pertanto, la valutazione:

$$P(X+Y \le 4) = P(X+Y=0) + P(X+Y=2) = 0.4 + 2a + b = 1 - b = 0.8$$

è coerente e si ottiene per $a = 0.1$ , $b = 0.2$.

7. La distribuzione finale di $\Theta$ è ancora normale con parametri:

$$m_n = m_5 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{n}{\sigma^2} \cdot \overline{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2}} = \frac{\frac{1}{9} \cdot 0 + \frac{5}{2} \cdot 1}{\frac{1}{9} + \frac{5}{2}} = \frac{5}{47} \ , \qquad \frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_5^2} = \frac{1}{9} + \frac{5}{2} = \frac{47}{18} \ ,$$

e quindi: $\sigma_5 = \sqrt{\frac{18}{47}}$. Allora:

$$P(\Theta > \theta_0 | \mathbf{x}) = P(\frac{\Theta - m_5}{\sigma_5} > \frac{\theta_0 - m_5}{\sigma_5} \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi(\frac{\theta_0 - m_5}{\sigma_5}) = \Phi(1) \ .$$

Pertanto: $\Phi(\frac{\theta_0 - m_5}{\sigma_5}) = 1 - \Phi(1) = \Phi(-1)$, da cui segue: $\frac{\theta_0 - m_5}{\sigma_5} = -1$,
cioè: $\theta_0 = m_5 - \sigma_5 = \frac{5}{47} - \sqrt{\frac{18}{47}}$ .

8. Si ha $f(x,y) = \frac{1}{2}$, per $(x,y) \in T$, e zero altrove. Allora:

$$P(X \le \frac{1}{2}) \vee (Y \le \frac{1}{2}) = 1 - P(X > \frac{1}{2} \ , \ Y > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{2-x} \frac{1}{2} dy = \cdots = \frac{1}{4} \ .$$

**Calcolo delle probabilità** (15/1/2001)

*(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)*

1. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è data da $f(x, y) = e^{-(x+y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare l'equazione della retta di regressione di $Y$ su $X$.
*Risp.* *retta di regr.* :

2. Dati $n$ eventi $E_1, \ldots, E_n$ indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = \frac{1}{2}$, stabilire la condizione che dev'essere soddisfatta da $n$ affinchè la probabilitá $\alpha$ dell'evento $A =$ "*gli eventi $E_1, \ldots, E_n$ sono tutti veri*" condizionata all'evento $H =$ "*almeno uno degli eventi $E_1, \ldots, E_n$ é vero*" sia minore di $\frac{1}{k}$, dove $k$ è un numero intero fissato.
*Risp.:*

3. La funzione caratteristica di un numero aleatorio $X$ è $\phi_X(t) = (\frac{e^{it}}{2} + \frac{1}{2})^5$. Calcolare la probabilità $\alpha$ dell'evento $X = 5$.
*Risp.:* $\alpha =$

4. Un vettore aleatorio discreto $(X, Y)$ ha come insieme di valori possibili
$$\mathcal{C} = \{(0, -1)\ ,\ \ (0, 1)\ ,\ \ (1, 0)\ ,\ \ (2, -4)\ ,\ \ (2, 4)\}\ .$$
Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma
$$p(0, -1)\ =\ p(0, 1)\ =\ a\ ;\ \ p(1, 0)\ =\ 0.3\ ;\ \ p(2, -4)\ =\ p(2, 4)\ =\ b\ .$$
Calcolare la covarianza $\sigma_{XY}$.
*Risp.:* $\sigma_{XY} =$

5. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_n)$, hanno distribuzione di Poisson con parametro incognito $\Theta$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \ldots + x_n = s$ e con $\Pi_{i=1}^n x_i! = p$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(\mathbf{x}|\theta)$.
*Risp.:* $\alpha(\mathbf{x}|\theta) =$

6. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è data da $f(x, y) = 2e^{-2x-y}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di rischio $h(x)$ di $X$.
*Risp.:* $h(x) =$

7. Da un'urna $U$ contenente 1 pallina bianca e 2 nere si effettuano due estrazioni senza restituzione e, se almeno una volta esce pallina bianca, Tizio vince una somma $S$ e il gioco si interrompe. In caso contrario, da un'urna $V$ contenente 2 palline bianche e 1 nera si effettuano due estrazioni senza restituzione e, se almeno una volta esce pallina nera, Tizio vince la somma $S$. Sia $X$ la vincita aleatoria in tale gioco. Calcolare l'importo $\Sigma$ che Tizio deve pagare per aver diritto a ricevere $X$.
*Risp.:* $\Sigma =$

8. Dati tre eventi $A, B, C$, con $C \subset AB$, $P(A) = 0.5$, $P(AB) = 0.3$, $P(C) = x$, stabilire se esiste un valore $x$ tale che $P(C|AB^c \vee C) = 0.5$.
*Risp.:* $x =$

**Calcolo delle probabilità**

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

*Soluzioni della prova scritta del 15/1/2001.*

1. Si ha:

$$f_1(x) = e^{-x},\ x \geq 0; \quad f_2(y) = e^{-y},\ y \geq 0; \quad f(x,y) = f_1(x)f_2(y),\ \forall\ (x,y).$$

Allora: $\rho = 0$. Inoltre: $I\!P(Y) = m_2 = 1$. Pertanto, l'equazione della retta di regressione di $Y$ su $X$, data in generale da $y = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$, diventa: $y = 1$.

2. Si ha:

$$\alpha = \frac{P(E_1 \wedge \cdots \wedge E_n)}{P(E_1 \vee \cdots \vee E_n)} = \frac{P(E_1 \wedge \cdots \wedge E_n)}{1 - P(E_1^c \wedge \cdots \wedge E_n^c)} = \frac{(\frac{1}{2})^n}{1 - (\frac{1}{2})^n} \leq a \iff 2^n \geq \frac{1 + \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}},$$

cioè, se e solo se: $2^n \geq k + 1$.

3. Ricordando che $(pe^{it} + q)^n$ è la funzione caratteristica di una distribuzione binomiale di parametri $n, p$, si ha: $X \sim B(5, \frac{1}{2})$ e quindi $\alpha = (\frac{1}{2})^5$.

4. Si ha: $X \in \{0, 1, 2\}$, $Y \in \{-4, -1, 0, 1, 4\}$, con

$$P(X = 0) = 2a, \quad P(X = 1) = 0.3, \quad P(X = 2) = 2b,$$
$$P(Y = -4) = P(Y = 4) = b, \quad P(Y = -1) = P(Y = 1) = a, \quad P(Y = 0) = 0.3,$$

e quindi: $I\!P(X) = 0.3 + 4b$, $I\!P(Y) = 0$. Inoltre: $XY \in \{-8, 0, 8\}$, con

$$P(XY = -8) = P(XY = 8) = b, \quad P(XY = 0) = 1 - 2b,$$

e quindi: $I\!P(XY) = 0$. Pertanto: $\sigma_{XY} = 0$.

5. Si ha: $X_i|\theta \sim \mathcal{P}(\theta)$, e quindi:

$$P(X_i = x_i|\theta) = \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\, e^{-\theta}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Allora:

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{x_i}}{x_i!}\, e^{-\theta} = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}\, e^{-n\theta} = \frac{\theta^s}{p}\, e^{-n\theta}.$$

6. Si ha:
$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = \cdots = 2e^{-2x}, \quad x \geq 0,$$

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^\infty f_1(t)dt = \cdots = e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Pertanto: $h(x) = \frac{f_1(x)}{S(x)} = \frac{2e^{-2x}}{e^{-2x}} = 2, \ \forall\, x \geq 0.$

7. Sia $E_i$ l'evento *"nell'i-ma estrazione esce pallina bianca"*. Allora $X = S$ se e solo se si verifica l'evento $E_1 \vee E_2 \vee E_3^c \vee E_4^c$, cioè: $X = S|E_1 \vee E_2 \vee E_3^c \vee E_4^c|$. Poichè: $\Sigma = I\!P(X)$, si ottiene:
$$\Sigma = I\!P(X) = S\ P(E_1 \vee E_2 \vee E_3^c \vee E_4^c) =$$
$$S[1 - P(E_1^c E_2^c E_3 E_4)] = S(1 - \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{2}) = \tfrac{8}{9}S.$$

8. Si ha: $P(AB^c) = P(A) - P(AB) = 0.5 - 0.3 = 0.2$. Inoltre, dall'ipotesi $C \subset AB$, segue $P(C) = x \leq 0.3$ . Allora, tenendo conto che $AB^cC = \emptyset$, si ottiene:
$$P(C|AB^c \vee C) = \frac{P[C \wedge (AB^c \vee C)]}{P(AB^c \vee C)} = \frac{P(C)}{P(AB^c \vee C)} = \frac{P(C)}{P(AB^c) + P(C)}\ .$$
Pertanto:
$$P(C|AB^c \vee C) = \frac{x}{0.2 + x} = 0.5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = P(C) = 0.2\ .$$

**Esercitazione di Calcolo delle probabilità**

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina, 16/12/2000)

1. Dati tre eventi $A, B, C$, con $C \subset AB$, $P(A) = P(B) = 0.5$, $P(AB) = y$, $P(C) = 0.1$, determinare l'insieme $I$ dei valori $y$ coerenti.
   *Risp.:* $I =$

2. Due amici, Piero e Carlo, svolgono una gara di tiro al bersaglio. Piero effettua le prime due prove e vince se colpisce almeno una volta il bersaglio. In caso contrario, Carlo effettua tre prove e vince se colpisce almeno una volta il bersaglio. In ciascuna prova Carlo colpisce il bersaglio con probabilità $\frac{2}{5}$, mentre Piero colpisce il bersaglio con probabilità $\frac{3}{4}$. Sia $E_i$ l'evento *"nell'i-ma prova il bersaglio viene colpito"*, $A$ l'evento *"vince Piero"* e $B$ l'evento *"vince Carlo"*. Calcolare $P(A|A \vee B)$.
   *Risp.:* $P(A|A \vee B) =$

3. La funzione caratteristica di un numero aleatorio $X$ è $\phi_X(t) = e^{-it-\frac{t^2}{2}}$. Posto $Y = X + 1$, calcolare la probabilità $p$ dell'evento $(|Y| > 1)$.
   *Risp.:* $p =$

4. Un vettore aleatorio $(X, Y)$ ha una distribuzione uniforme nell'insieme di punti $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq -2x + 2\}$. Calcolare la densità marginale $f_1(x)$.
   *Risp.:* $f_1(x) =$

5. Dati 4 eventi $E_1, \ldots, E_4$ indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = \frac{1}{2}$, calcolare la covarianza di $|E_1| + |E_2| + |E_3|, |E_2| + |E_3| + |E_4|$.
   *Risp.:* $Cov(|E_1| + |E_2| + |E_3|, |E_2| + |E_3| + |E_4|) =$

6. Dato un campione casuale $(X_1, \ldots, X_4)$, le cui componenti hanno distribuzione normale con valor medio $\Theta$ incognito e varianza $\sigma^2 = 1$, si supponga che la distribuzione iniziale di $\Theta$ sia normale con parametri $m_0 = 1, \sigma_0 = 2$. Avendo osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$ con $x_1 + \ldots + x_4 = 4$, calcolare la distribuzione finale di $\Theta$.
   *Risp.:* $\Theta|\mathbf{x} \sim$

7. Un vettore aleatorio discreto $(X, Y)$ ha come insieme di valori possibili
   $$\mathcal{C} = \{(-1, 1)\ ,\ \ (0, 1)\ ,\ \ (1, -2)\ ,\ \ (4, -2)\ ,\ \ (4, 2)\}\ .$$
   Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma
   $$p(-1, 1)\ =\ 0.2\ ;\ \ p(0, 1)\ =\ p(1, -2)\ =\ 0.1\ ;\ \ p(4, -2)\ =\ p(4, 2)\ =\ a\ .$$
   Stabilire, dopo aver calcolato $a$, se $X, Y$ sono indipendenti.
   *Risp.:* $X, Y$ *Indip.*?

8. Dato un numero aleatorio $X = 2|A| - |A^cB| + 3|ABC^c|$, con $C \subset AB$, $P(A) = P(B) = 0.5$, $P(AB) = 0.3$, $P(C) = 0.1$, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$ per $0 < x < 2$.
   *Risp.:* $F(x) =$