Calcolo delle probabilità (29/11/2001)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Da un lotto contenente 5 pezzi buoni e 3 difettosi si estraggono senza restituzione 3 pezzi. Sia E_i l'evento *"l'i-mo pezzo estratto è buono"*. Calcolare la probabilità dell'evento condizionato $(E_2E_3 \,|\, E_2 \vee E_3)$.
$$P(E_2E_3 \,|\, E_2 \vee E_3) = \frac{2}{5}$$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è la funzione $f(x, y) = e^{-(x+y)}$, per $x \geq 0,\ y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la varianza di $X - Y$.
$$Var(X - Y) = 2$$

3. L'insieme dei valori possibili di un numero aleatorio discreto X è $\mathcal{C} = \{0, 1, \dots, 6\}$, con
$$P(X = h) \;=\; \binom{6}{h} \left(\tfrac{1}{4} \right)^h \left(\tfrac{3}{4} \right)^{6-h} \;, \quad h = 0, 1, \dots, 6.$$
Calcolare la funzione caratteristica di X.
$$\phi_X(t) = (\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4})^6$$

4. Da un lotto contenente 4 lampadine buone e 4 difettose se ne prendono 4 in blocco. Sia X il numero aleatorio di lampadine buone fra le 4 estratte. Calcolare la varianza di X.
$$Var(X) = \frac{4}{7}$$

5. La densità di probabilità di un numero aleatorio X è data da $f(x) = \frac{x}{2},\ 0 \leq x \leq 1;\ \ f(x) = \frac{4-x}{6},\ 1 < x \leq 4$; con $f(x) = 0$ altrove. Determinare la funzione di ripartizione $F(x)$.
$$F(x) = \cdots$$

6. Un lotto è costituito da 100 componenti, dei quali 40 sono stati costruiti da una macchina M_1 e 60 da una macchina M_2. Il generico componente risulta difettoso con probabilità $\frac{1}{5}$ se prodotto da M_1 e con probabilità $\frac{2}{5}$ se prodotto da M_2. Dal lotto viene estratto a caso un componente e viene esaminato. Definiti gli eventi $E =$ *"Il pezzo esaminato risulta non difettoso"* ed $H =$ *"Il pezzo esaminato è stato prodotto dalla macchina M_1"*, calcolare il rapporto r tra le probabilità $P(H|E)$ e $P(H^c|E)$.
$$r = \frac{8}{9}$$

7. Siano dati due numeri aleatori continui X, Y, non negativi e indipendenti. Inoltre, si supponga che la densità di X sia $f_1(x) = 4xe^{-2x}$, per $x \geq 0$, con $f_1(x) = 0$ altrove, e che la funzione di sopravvivenza di Y sia $S_2(y) = e^{-2y}$ per ogni $y > 0$. Calcolare la funzione di rischio $h(z)$ di $Z = X + Y$.
$$h(z) = \frac{4z^2}{2z^2 + 2z + 1} \;, \quad z > 0$$

8. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \dots, X_n)$, hanno distribuzione esponenziale con parametro incognito Θ. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, con $x_1 + \cdots + x_n = s$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(\mathbf{x}|\theta)$.
$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) = \theta^n e^{-s\theta}$$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 29/11/2001.

1. Gli eventi E_i hanno tutti probabilità $\frac{5}{8}$. Inoltre
$$P(E_2E_3) = P(E_1E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14} \cdot$$
Allora
$$P(E_2E_3 \,|\, E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_2E_3)}{P(E_2 \vee E_3)} = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8} + \frac{5}{8} - \frac{5}{14}} = \frac{2}{5} \cdot$$

2. Si ha
$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = e^{-x}\,, \quad x \geq 0\,;$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = e^{-y}\,, \quad y \geq 0\,.$$
Pertanto X e Y sono indipendenti e con uguale distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$, da cui segue
$$Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} = 1.$$
Inoltre, essendo $Cov(X,Y) = 0$, risulta
$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = 2\,.$$

3. Come si può notare, X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 6, p = \frac{1}{4}$. Allora, ricordando che la funzione caratteristica di una distribuzione binomiale di parametri n, p è $(pe^{it} + q)^n$, segue: $\phi_X(t) = (\frac{1}{4}e^{it} + \frac{3}{4})^6$.

4. X ha distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 8, n = 4, p = \frac{1}{2}$. Pertanto
$$Var(X) = npq(1 - \frac{n-1}{N-1}) = \frac{4}{7} \cdot$$

5. Per ogni fissato valore reale x, si ha
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{-x^2+8x-4}{12}, & 1 < x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

6. Si ha

$$P(H|E) \;=\; \frac{P(H)P(E|H)}{P(E)}\,, \qquad P(H^c|E) \;=\; \frac{P(H^c)P(E|H^c)}{P(E)}\,,$$

e quindi

$$r \;=\; \frac{P(H|E)}{P(H^c|E)} \;=\; \frac{P(H)P(E|H)}{P(H^c)P(E|H^c)} \;=\; \frac{\frac{40}{100}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{60}{100}\cdot\frac{3}{5}} \;=\; \frac{8}{9}\,.$$

7. Come si può notare, X ha distribuzione Gamma di parametri $c = 2, \lambda = 2$, mentre Y ha distribuzione Gamma di parametri $c = 1, \lambda = 2$, cioè esponenziale di parametro $\lambda = 2$. Pertanto, indicando con g la densità di Z, si ha $g = G_{2,2} * G_{1,2} = G_{3,2}$, cioè $g(z) = 4z^2e^{-2z}$, per $z \geq 0$, con $g(z) = 0$ altrove. Allora, per ogni $z > 0$, si ha

$$S(z) = P(Z > z) = \int_z^{+\infty} 4t^2e^{-2t}dt = \cdots = (2z^2 + 2z + 1)e^{-2z}\,,$$

da cui segue

$$h(z) = \frac{g(z)}{S(z)} = \frac{4z^2e^{-2z}}{(2z^2 + 2z + 1)e^{-2z}} = \frac{4z^2}{2z^2 + 2z + 1}\,, \quad z > 0\,.$$

8. Per ogni fissato $\theta > 0$, si ha

$$X_i|\theta \;\sim\; f(x_i|\theta) = \theta e^{-\theta x_i}\,, \;\; 1 = 1, 2, \ldots, n.$$

Pertanto:

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) \;=\; f(x_1|\theta)\cdots f(x_n|\theta) \;=\; \theta e^{-\theta x_1}\cdots\theta e^{-\theta x_n} \;=\; \theta^n e^{-s\theta}\,.$$