Calcolo delle probabilità (28/3/2002)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Da un'urna contenente 3 palline, segnate con i valori numerici $-1, 0, 1$, si effettuano 2 estrazioni senza restituzione. Sia (X, Y) il vettore aleatorio discreto corrispondente al risultato dell'esperimento. Calcolare la probabilitá p dell'evento $(X + Y = 0)$.
   Risp.: $p =$

2. Un vettore aleatorio continuo (X, Y) ha una distribuzione uniforme sul rettangolo $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4;\ 0 \leq y \leq 2\}$. Calcolare la varianza del numero aleatorio $2X - 3Y$.
   Risp.: $Var(2X - 3Y) =$

3. Un numero aleatorio continuo X ha una densitá di probabilitá
$$f(x) = a(x-1)^2\ , \quad 0 \leq x \leq 2\ ,$$
   con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare il valore della costante a.
   Risp.: $a =$

4. Un lotto formato da 8 componenti elettronici, uno dei quali é difettoso, é stato suddiviso a caso in 2 gruppi, A e B, di 4 componenti ciascuno. Dal gruppo A vengono prelevati a caso 2 componenti. Definiti gli eventi $E =$ *"i 2 componenti prelevati da A sono entrambi non difettosi "*, $H =$ *"il componente difettoso sta nel gruppo B"*, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $H|E$.
   Risp.: $P(H|E) =$

5. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_n)$, hanno una distribuzione esponenziale con parametro incognito Θ. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, con $x_1 + \ldots + x_n = s$, calcolare la funzione di verosimiglianza $\alpha(\mathbf{x}|\theta)$.
   Risp.: $\alpha(\mathbf{x}|\theta) =$

6. La funzione di rischio $h(x)$ di un numero aleatorio non negativo X é, per ogni $x > 0$, del tipo $h(x) = 2 + ax$. Determinare il valore della costante a tale che la densità di probabilitá di X sia, per ogni $x > 0$, data da $f(x) = 2e^{-2x}$.
   Risp.: $a =$

7. Un lotto é composto da 4 pezzi, dei quali 2 prodotti da una macchina M_1 e 2 prodotti da una macchina M_2. Il singolo pezzo prodotto da M_1 (rispettivamente M_2) risulta difettoso, indipendentemente dagli altri pezzi, con probabilitá p_1 (rispettivamente p_2). Definiti gli eventi $A =$ *"esattamente uno dei 4 pezzi é difettoso"* , $K =$ *"uno dei pezzi prodotti da M_1 é difettoso"*, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $K|A$.
   Risp.: $P(K|A) =$

8. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è data da $\phi_X(t) = e^{2it - \frac{t^2}{2}}$. Posto $Y = X - 2$, calcolare la probabilità p dell'evento $(|Y| \leq 2)$.
   Risp.: $p =$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 28/3/2002.

1. L'insieme dei valori possibili del vettore aleatorio (X, Y) è

$$\mathcal{C} = \{(-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 1), (1, -1), (1, 0)\} .$$

Per ogni $(x, y) \in \mathcal{C}$ si ha

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y \,|\, X = x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} .$$

Quindi, il vettore aleatorio (X, Y) ha distribuzione uniforme sull'insieme $\mathcal{C}$. Come si può facilmente verificare, i valori possibili di $X + Y$ sono $-1, 0, 1$.
Inoltre, si ha

$$P(X + Y = 0) = p(-1, 1) + p(1, -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} .$$

2. Si ha: $f(x, y) = \frac{1}{6}$ per $(x, y) \in R$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Allora X e Y hanno distribuzione uniforme rispettivamente in $[1, 4]$ e $[0, 2]$, con

$$f_1(x) = \int_0^2 f(x, y)dy = \cdots = \tfrac{1}{3},\ 1 \leq x \leq 4;$$

$$f_2(y) = \int_1^4 f(x, y)dx = \cdots = \tfrac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 2 .$$

Pertanto: $Var(X) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, $Var(Y) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Poiché $f(x, y) = f_1(x)f_2(y),\ \forall\ (x, y)$, si ha $Cov(X, Y) = 0$, da cui segue

$$Var(2X - 3Y) = 4Var(X) + 9Var(Y) - 12Cov(X, Y) = 4 \cdot \frac{3}{4} + 9 \cdot \frac{1}{3} = 6 .$$

3. Si ha:

$$\int_0^2 f(x)dx = 1 = a \int_0^2 (x - 1)^2 dx = \tfrac{a}{3}[(x - 1)^3]_0^2 = \tfrac{a}{3}(1 + 1) = \tfrac{2}{3}a ,$$

da cui segue: $a = \frac{3}{2}$.

4. Si ha:

$$P(H) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} , \quad P(E|H) = 1 , \quad P(E|H^c) = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} .$$

Allora:

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} .$$

5. Per ogni fissato valore $\theta > 0$, si ha:

$$X_i|\theta \sim \theta e^{-\theta x} \ , \ x \geq 0 \ ; \quad i = 1, \ldots, n,$$

da cui segue

$$\alpha(\mathbf{x}|\theta) = \Pi_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \cdot \sum_{i=1}^n x_i} = \theta^n e^{-s\theta} \ .$$

6. Si ha:

$$f(x) = h(x)S(x) = (2 + ax)e^{-\int_0^x (2+at)dt} = (2 + ax)e^{-[2t + \frac{at^2}{2}]_0^x} =$$

$$(2 + ax)e^{-(2x + \frac{ax^2}{2})} = 2e^{-2x} \ , \ \forall \, x > 0 \ ,$$

da cui segue $a = 0$.

7. Indicando con X (rispettivamente Y) il numero di pezzi difettosi prodotti da M_1 (rispettivamente M_2), si ha

$$A = (X + Y = 1) = AK \vee AK^c = (X = 1, Y = 0) \vee (X = 0, Y = 1) \, ,$$

e quindi:

$$P(A) = P(X = 1, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 0) + P(X = 0)P(Y = 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} p_1(1 - p_1) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - p_2)^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} (1 - p_1)^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} p_2(1 - p_2) =$$

$$= 2p_1(1 - p_1)(1 - p_2)^2 + 2(1 - p_1)^2 p_2(1 - p_2) \ .$$

Allora:

$$P(K|A) = \frac{P(AK)}{P(A)} = \frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=1)} =$$

$$= \frac{2p_1(1-p_1)(1-p_2)^2}{2p_1(1-p_1)(1-p_2)^2+2(1-p_1)^2 p_2(1-p_2)} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_1(1-p_2)+p_2(1-p_1)} \ .$$

8. $\phi_X(t) = e^{2it - \frac{t^2}{2}}$ è la funzione caratteristica di una distribuzione normale di parametri $m = 2, \sigma = 1$. Pertanto $Y = X - 2$ ha una distribuzione normale standard. Allora:

$$p = P(|Y| \leq 2) = 2\Phi(2) - 1 \ \simeq \ 0.9545 \ .$$