Calcolo delle probabilità (27/11/2002)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Dati 3 eventi A, B, C, con
$$AB = \emptyset, \quad A \vee B \subset C, \quad P(A) = x, \quad P(B) = y, \quad P(A \vee B \,|\, C) = 0.5, \quad P(C) = 0.8,$$
determinare l'insieme I delle valutazioni (x, y) coerenti.
Risp.: $I =$

2. Un vettore aleatorio discreto (X, Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme
$$\mathcal{C} = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,0), (1,-1), (1,0), (1,1)\} \,.$$
Stabilire se X e Y sono: (i) incorrelati; (ii) stocasticamente indipendenti.
Risp.: Incorrelati? Indipendenti?

3. Indicato con $\mathcal{C}$ l'insieme di punti $\{(x, y) : x \geq 0, \; 0 \leq y \leq x\}$, la densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è data da $f(x, y) = ke^{-(x+y)}$ per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k.
Risp.: $k =$

4. Con riferimento all'esercizio precedente, fissato un valore $y > 0$ e un valore "abbastanza piccolo" $\Delta y > 0$, calcolare in modo approssimato la probabilità p dell'evento condizionato $(y < Y \leq y + \Delta y \,|\, Y > y)$.
Risp.: $p =$

5. La densità di probabilità $f(x)$ di un numero aleatorio X è uguale ad x nell'intervallo $[0, 1]$, è uguale a $2 - x$ nell'intervallo $(1, 2]$, e vale 0 altrove. Determinare la funzione di ripartizione di X.
Risp.: $F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$

6. Da un mazzo di 4 chiavi indistinguibili, una delle quali difettosa, se ne prelevano a caso 2 che vengono conservate in un cassetto. Successivamente, per n volte (con restituzione) dal cassetto viene presa a caso una delle chiavi e questa risulta ogni volta non difettosa (evento E). Indicando con H l'evento *"la chiave difettosa è una delle 2 conservate nel cassetto "*, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $H|E$.
Risp.: $\alpha =$

7. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 3, \; \sigma_0 = 2$. Le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_6)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_6)$, con $x_1 + \ldots + x_6 = 18$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(\frac{13}{5} \leq \Theta \leq \frac{17}{5} \,|\, \mathbf{x})$.
Risp.: $p =$

8. Da un'urna A, contenente 2 palline bianche e 4 nere, si effettuano 3 estrazioni con restituzione ottenendo un numero (aleatorio) X di palline bianche. Successivamente, da un'urna B, contenente 2 palline bianche e 1 nera, si effettuano 3 estrazioni con restituzione ottenendo un numero (aleatorio) Y di palline nere. Calcolare la funzione caratteristica del numero aleatorio $Z = X + Y$.
Risp.: $\phi_Z(t) =$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 27/11/2002.

1. Si ha: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) = x + y$. Inoltre:
$$P(A \vee B \,|\, C) = \frac{P[(A \vee B) \wedge C]}{P(C)} = \frac{P(A \vee B)}{P(C)} = \frac{x+y}{0.8} = 0.5\,.$$
Pertanto, $x + y = 0.4$ e quindi:
$$I = \{(x,y) \,:\, x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y = 0.4\} = \{(x, 0.4-x) \,:\, 0 \leq x \leq 0.4\}\,.$$

2. Per ogni $(x,y) \in \mathcal{C}$ si ha $P(X = x, Y = y) = \frac{1}{7}$. Inoltre
$$X \in \{-1,0,1\}\,, \qquad Y \in \{-1,0,1\}\,, \qquad XY \in \{-1,0,1\}\,,$$
con
$$P(X=-1) = \tfrac{3}{7}\,, \qquad P(X=0) = \tfrac{1}{7}\,, \qquad P(X=1) = \tfrac{3}{7}\,,$$
$$P(Y=-1) = \tfrac{2}{7}\,, \qquad P(Y=0) = \tfrac{3}{7}\,, \qquad P(Y=1) = \tfrac{2}{7}\,,$$
$$P(XY=-1) = \tfrac{2}{7}\,, \quad P(XY=0) = \tfrac{3}{7}\,, \quad P(XY=1) = \tfrac{2}{7}\,.$$
Allora:
$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(XY) = 0$$
e quindi: $cov(X,Y) = 0$, cioè X e Y sono incorrelati. Inoltre, si può osservare ad esempio che
$$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{7} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7}\,.$$
Pertanto X e Y non sono indipendenti.

3. Dev'essere: $\int\int_{\mathcal{C}} f(x,y)dxdy = 1$, da cui segue:
$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^x k e^{-(x+y)} dy = k \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_0^x e^{-y} dy = k \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 - e^{-x}) dx =$$
$$= k[\int_0^{+\infty} e^{-x} dx - \tfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} dx] = k(1 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{k}{2} = 1\,.$$
Pertanto: $k = 2\,.$

4. Si ha:
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \int_y^{+\infty} 2e^{-(x+y)} dx =$$
$$= 2e^{-y} \int_y^{+\infty} e^{-x} dx = 2e^{-2y}\ ,\ \forall\, y \geq 0\,.$$
Pertanto Y ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$.
Quindi: $h_Y(y) = 2, \forall y \geq 0$. Allora, ricordando l'interpretazione probabilistica della funzione di rischio, segue:
$$p = P(y < Y \leq y + \Delta y \,|\, Y > y) \simeq h_Y(y)\Delta y = 2\Delta y\,.$$
Nota: in termini esatti si avrebbe
$$p = P(y < Y \leq y + \Delta y \,|\, Y > y) = \tfrac{P(y<Y\leq y+\Delta y)}{P(Y>y)} = \tfrac{S_Y(y) - S_Y(y+\Delta y)}{S_Y(y)} = \tfrac{e^{-2y} - e^{-2(y+\Delta y)}}{e^{-2y}} =$$
$$= 1 - e^{-2\Delta y} = 1 - (1 + \tfrac{(-2\Delta y)^1}{1!} + \tfrac{(-2\Delta y)^2}{2!} + \cdots) = 2\Delta y + o(\Delta y) \simeq 2\Delta y\,.$$

5. Ricordando la relazione $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, segue

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Nota: per $1 < x \le 2$ è stata utilizzata la formula

$$F(x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{(2-x)^2}{2} = -1 + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

6. Si ha:

$$P(H) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,, \quad P(E|H) = \left(\frac{1}{2}\right)^n\,, \quad P(E|H^c) = 1\,.$$

Allora:

$$P(H|E) = \frac{P(EH)}{P(E)} = \frac{P(E|H)P(H)}{P(E|H)P(H) + P(E|H^c)P(H^c)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{1+2^n}\,.$$

7. Si ha $\overline{x}_6 = m_0 = 3$, da cui segue: $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{m_6,\sigma_6}$, con

$$\frac{1}{\sigma_6^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2} = \frac{1}{4} + \frac{6}{1} = \frac{25}{4}\,, \qquad m_6 = \frac{\frac{1}{\sigma_0^2} \cdot m_0 + \frac{6}{\sigma^2} \cdot \overline{x}_6}{\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{6}{\sigma^2}} = 3\,.$$

Pertanto: $\Theta|\mathbf{x} \sim N_{3,\frac{2}{5}}$. Allora, osservando che il numero aleatorio (condizionato) $\frac{\Theta-3}{\frac{2}{5}}\,|\,\mathbf{x}$ ha distribuzione normale standard, si ottiene:

$$P\left(\tfrac{13}{5} \le \Theta \le \tfrac{17}{5}\;|\;\mathbf{x}\right) = P\left(\frac{\frac{13}{5}-3}{\frac{2}{5}} \le \frac{\Theta-3}{\frac{2}{5}} \le \frac{\frac{17}{5}-3}{\frac{2}{5}}\;|\;\mathbf{x}\right) =$$

$$= P\left(-1 \le \frac{\Theta-3}{\frac{2}{5}} \le 1\;|\;\mathbf{x}\right) = 2\Phi(1) - 1 \;\simeq\; 0.6826\,.$$

8. I numeri aleatori X e Y sono stocasticamente indipendenti ed entrambi si possono rappresentare come somma di 3 eventi indipendenti ed equiprobabili, di probabilità $\frac{1}{3}$. Perciò X e Y hanno una distribuzione binomiale $B(3, \frac{1}{3})$. Allora, si ha

$$\phi_X(t) = \phi_Y(t) = \left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^3\,,$$

da cui segue

$$\phi_Z(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \left(\frac{1}{3}e^{it} + \frac{2}{3}\right)^6\,.$$

Nota: Z si può rappresentare come somma di 6 eventi indipendenti ed equiprobabili, di probabilità $\frac{1}{3}$, pertanto (come risulta anche dalla funzione caratteristica) ha una distribuzione binomiale $B(6, \frac{1}{3})$.