Calcolo delle probabilità (*Ing. EIT - Latina* - 26/3/2003)

1. La densità di probabilità $f(x)$ di un numero aleatorio X è uguale ad $ax+b$ nell'intervallo $[0,2]$, con $f(0)=1$, $f(2)=0$, e vale 0 altrove. Determinare la funzione di ripartizione di X.

$$F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

2. Da una stanza, in cui ci sono 4 maschi e 4 femmine, escono a caso 6 persone in fila. Calcolare la probabilità α che escano i 4 maschi consecutivamente.

$$\alpha =$$

3. Un vettore aleatorio continuo (X,Y) ha una distribuzione uniforme sul quadrato $S = [0,2]\times[0,2]$. Due punti mobili P e Q, posizionati in $x_P = 0$ e $x_Q = 3$, nell'istante zero partono con velocità (aleatorie) X e Y in direzione del punto A di ascissa $x_A = 6$. Calcolare la probabilità p che Q giunga in A prima di P.

$$p =$$

4. La distribuzione iniziale di un numero aleatorio Θ è normale con parametri $m_0 = 0$, $\sigma_0 = 3$. Le componenti di un campione casuale $(X_1,\ldots,X_n)$, subordinatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, hanno una distribuzione normale con valor medio θ e scarto standard $\sigma = 1$. Supposto di aver osservato un campione casuale $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, con $x_1+\ldots+x_n = 0$, calcolare il valore θ_0 tale che risulti $P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = \Phi(1)$.

$$\theta_0 =$$

5. Dati due numeri aleatori X e Y, stocasticamente indipendenti e con densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}(x-40)} & , \ x \geq 40 \\ 0 & , \ x < 40 \end{cases} , \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{25}e^{-\frac{1}{25}y} & , \ y \geq 0 \\ 0 & , \ y < 0 \end{cases} ,$$

calcolare la probabilità p dell'evento $E = (Y > X - 40)$.

$$p =$$

6. Da un lotto A, contenente 3 pezzi buoni e 1 difettoso, si estraggono a caso 2 pezzi che vengono inseriti in un lotto B, contenente 2 pezzi buoni e 1 difettoso. Successivamente, da B si prelevano a caso 3 pezzi. Indicando con X il numero (aleatorio) di pezzi difettosi fra quelli inseriti in B e con Y il numero (aleatorio) di pezzi difettosi fra quelli prelevati da B, calcolare la probabilità p_{xy} di ogni possibile valore (x,y) del vettore aleatorio (X,Y).

(x,y) : , , , , ,

p_{xy} : , , , , ,

7. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica di Y.

$$\phi_Y(t) =$$

8. Dato un vettore aleatorio continuo (X,Y), con densità congiunta

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} , \quad (x,y) \in I\!R ,$$

calcolare la probabilità α dell'evento $A = (max\{X,Y\} \leq 1 \,|\, min\{X,Y\} > -1)$.

$$\alpha =$$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 26/3/2003.

1. Come si può verificare, per $x \in [0, 2]$, si ha $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$. Allora, ricordando la relazione $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, segue

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{x^2}{4} + x, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

2. Indicando con E_i l'evento "l'i-mo persona che esce dalla stanza è un maschio", si ha:

$$\alpha = P(E_1E_2E_3E_4 \vee E_2E_3E_4E_5 \vee E_3E_4E_5E_6) = P(E_1E_2E_3E_4) + P(E_2E_3E_4E_5) + P(E_3E_4E_5E_6) =$$

$$= 3P(E_1E_2E_3E_4) = 3 \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{70}\,.$$

3. Si ha $f(x, y) = \frac{1}{4}$, per $(x, y) \in S$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Indicando con T_P e T_Q i tempi aleatori impiegati da P e Q per arrivare in A, si ha

$$T_P = \frac{6}{X}\,, \quad T_Q = \frac{3}{Y}\,.$$

Allora, definendo $I = \{(x, y) : y > \frac{1}{2}x\}$, segue

$$p = P(T_P > T_Q) = P(\tfrac{6}{X} > \tfrac{3}{Y}) = P(Y > \tfrac{1}{2}X) = P[(X, Y) \in I] =$$

$$= \int\int_I f(x, y)dxdy = \frac{\mu(I)}{\mu(S)} = \frac{3}{4}\,.$$

4. Si ha $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{m_n,\sigma_n}$ ed essendo $\overline{x} = m_0 = 0$ segue $m_n = 0$. Inoltre

$$\frac{1}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{n}{\sigma^2} = \frac{1}{9} + n = \frac{1 + 9n}{9}\,,$$

e quindi $\sigma_n = \frac{3}{\sqrt{1+9n}}$. Pertanto $\Theta \mid \mathbf{x} \sim N_{0,\frac{3}{\sqrt{1+9n}}}$. Allora

$$P(\Theta > \theta_0 \mid \mathbf{x}) = 1 - \Phi_{0,\frac{3}{\sqrt{1+9n}}}(\theta_0) = 1 - \Phi\left(\frac{\theta_0}{\frac{3}{\sqrt{1+9n}}}\right) = \Phi\left(-\frac{\theta_0}{\frac{3}{\sqrt{1+9n}}}\right) =$$

$$= \Phi(1) \iff \theta_0 = -\frac{3}{\sqrt{1+9n}} = -\sigma_n\,.$$

5. Si ha $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ e quindi

$$p = P(Y > X - 40) = \int_{40}^{+\infty} f_X(x)dx \int_{x-40}^{+\infty} f_Y(y)dy = \int_{40}^{+\infty} \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}(x-40)}e^{-\frac{1}{25}(x-40)}dx =$$

$$= \frac{1}{10}\frac{50}{7}\int_{40}^{+\infty} \frac{7}{50}e^{-\frac{7}{50}(x-40)}dx = \frac{5}{7}\int_{0}^{+\infty} \frac{7}{50}e^{-\frac{7}{50}u}du = \frac{5}{7} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{25}}\,.$$

6. Definendo $p'_x = P(X = x)$, $p''_{y|x} = P(Y = y|X = x)$, si ha

$$X \in \{0, 1\}, \quad (X, Y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\},$$

con

$$p'_0 = \frac{\binom{3}{2}\binom{1}{0}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{2} = p'_1, \quad p''_{0|0} = \frac{\binom{4}{3}\binom{1}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{2}{5}, \ p''_{1|0} = 1 - p''_{0|0} = \frac{3}{5},$$

$$p''_{0|1} = \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{0}}{\binom{5}{3}} = \frac{1}{10}, \ p''_{1|1} = \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{1}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{5}, \ p''_{2|1} = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}.$$

Pertanto, osservando che $p_{xy} = p'_x \cdot p''_{y|x}$, si ha

$$p_{00} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad p_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \quad p_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{20}, \quad p_{11} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{20}.$$

7. Ricordando che

$$p_{00} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{5}, \quad p_{01} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \quad p_{10} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{20}, \quad p_{11} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3}{20},$$

segue $Y \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(Y = 0) = p''_0 = p_{00} + p_{10} = \frac{1}{4}, \quad P(Y = 1) = p''_1 = p_{01} + p_{11} = \frac{3}{5}, \quad P(Y = 2) = p''_2 = p_{12} = \frac{3}{20}.$$

Allora

$$\phi_Y(t) = I\!\!P(e^{itY}) = \sum_{n=0}^{2} p''_n e^{itn} = \frac{1}{4} + \frac{3}{5}e^{it} + \frac{3}{20}e^{2it}.$$

8. Come si può verificare, la distribuzione congiunta è una normale bidimensionale, con parametri $m_1 = m_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1, \rho = 0$. Pertanto X e Y sono indipendenti e con distribuzione normale standard. Allora, si ha

$$\alpha = P(A) = P((max\{X, Y\} \leq 1 \,|\, min\{X, Y\} > -1)) = \frac{P((max\{X, Y\} \leq 1\,,\, min\{X, Y\} > -1))}{P(min\{X, Y\} > -1)} =$$

$$= \frac{P(X \leq 1,\, Y \leq 1,\, X > -1,\, Y > -1)}{P(X > -1,\, Y > -1)} = \frac{P(-1 < X \leq 1,\, -1 < Y \leq 1)}{P(X > -1,\, Y > -1)} =$$

$$= \frac{P(-1 < X \leq 1)P(-1 < Y \leq 1)}{P(X > -1)P(Y > -1)} = \cdots = \frac{[2\Phi(1) - 1]^2}{[\Phi(1)]^2} \simeq \frac{0.6826^2}{0.8413^2} \simeq 0.6583.$$