Calcolo delle probabilità (10/9/2003)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Dati tre eventi E_1, E_2, E_3 indipendenti ed equiprobabili, con $P(E_i) = \frac{1}{2}$, calcolare la probabilità α che E_1 ed E_2 siano entrambi veri, supposto che almeno due dei tre eventi siano veri.

   $\alpha =$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, sia X il numero aleatorio di eventi veri fra i tre considerati. Calcolare la funzione caratteristica di X.

   $\phi_X(t) =$

3. Il codominio di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è dato dall'insieme $\mathcal{C} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 2\}$. La densità congiunta di (X, Y) è data da $f(x, y) = kx^2y$, per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Calcolare la costante k e stabilire se gli eventi $A = (X \leq 2), B = (Y \leq 1)$ sono stocasticamente indipendenti.

   $k =$ $\qquad$ A, B *stocast. indip.?*

4. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la probabilità γ dell'evento condizionato $(AB \,|\, A \vee B)$.

   $\gamma =$

5. Con riferimento all'esercizio n. 3, calcolare la funzione di ripartizione $F_1(x)$ di X.

   $$F_1(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

6. Da una stanza, in cui inizialmente ci sono 5 uomini e 3 donne, escono a caso 4 persone. Sia X il numero aleatorio di maschi rimasti nella stanza ed Y il numero aleatorio di donne rimaste nella stanza. Calcolare il codominio $\mathcal{C}$ del vettore aleatorio (X, Y) e la covarianza di X, Y.

   $\mathcal{C} = \{ \qquad \}$ $\qquad$ $Cov(X, Y) =$

7. Un sistema S è costituito da due dispositivi in serie D_1 e D_2. I rispettivi tempi di durata sono due numeri aleatori T_1 e T_2 stocasticamente indipendenti, con funzioni di rischio $h_1(t) = 3$ e $h_2(t) = 1$, $t \geq 0$. Indicando con T il tempo aleatorio di durata del sistema S, calcolare, per $t \geq 0$, la funzione di rischio $h(t)$ di T.

   $h(t) =$

8. Dato un parametro aleatorio Θ, con distribuzione iniziale normale di parametri $m_0 = 1, \sigma_0 = \sqrt{2}$, le componenti di un campione casuale $(X_1, \ldots, X_{10})$ hanno, condizionatamente ad ogni fissato valore θ di Θ, distribuzione normale di parametri θ e $\sigma = 2$. Supposto di aver osservato un campione $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{10})$, con $x_1 + \cdots + x_{10} = 10$, calcolare la previsione m_{10} e lo scarto quadratico medio σ_{10} della distribuzione finale (cioè, condizionata ad $\mathbf{x}$) di Θ. Inoltre, calcolare la probabilità α dell'evento condizionato $(\Theta > 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \mid \mathbf{x}$.

   $m_{10} =$ $\qquad$ $\sigma_{10} =$ $\qquad$ $\alpha =$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta del 10/9/2003.

1. Ricordando che

$$P(A \vee B \vee C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - PAC) - P(BC) + P(ABC)\,,$$

si ha

$$\alpha = P(E_1E_2 \,|\, E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3) = \tfrac{P(E_1E_2)}{P(E_1E_2 \vee E_1E_3 \vee E_2E_3)} =$$

$$= \tfrac{P(E_1E_2)}{P(E_1E_2)+P(E_1E_3)+P(E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)-P(E_1E_2E_3)+P(E_1E_2E_3)} =$$

$$= \tfrac{(\frac{1}{2})^2}{3(\frac{1}{2})^2 - 2\cdot(\frac{1}{2})^3} = \tfrac{1}{2}\,.$$

2. Si ha $X = |E_1| + |E_2| + |E_3|$. Inoltre, essendo gli eventi indipendenti ed equiprobabili, X ha una distribuzione binomiale di parametri $n = 3, p = \frac{1}{2}$. Pertanto, risulta

$$\phi_X(t) = \sum_{h=0}^{3} \binom{3}{h} \left(\frac{1}{2}\right)^h \left(\frac{1}{2}\right)^{3-h} e^{ith} = \cdots = \left(\frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}\right)^3 .$$

3. Si ha

$$\int_0^3 \int_0^2 kx^2y\,dx\,dy = \cdots = 18k = 1\,,$$

e quindi $k = \frac{1}{18}$. Inoltre, si ha

$$P(A) = \textstyle\int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{18}x^2y\,dx\,dy = \cdots = \frac{8}{27}\,,$$

$$P(B) = \textstyle\int_0^3 \int_0^1 \frac{1}{18}x^2y\,dx\,dy = \cdots = \frac{1}{4}\,,$$

$$P(AB) = \textstyle\int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{18}x^2y\,dx\,dy = \cdots = \frac{2}{27} = \frac{8}{27}\cdot\frac{1}{4} = P(A)P(B)\,.$$

Pertanto A e B sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha

$$\gamma = P(AB|A \vee B) = \frac{P(AB)}{P(A \vee B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \cdots = \frac{8}{51}\,.$$

5. Si ha $F_1(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F_1(x) = 1$, per $x \geq 3$. Inoltre, per $x \in (0, 3)$, si ha

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t)dt = \int_0^x \left(\int_0^2 \frac{1}{18}t^2y\,dy\right) dt = \frac{1}{9}\int_0^x t^2dt = \frac{x^3}{27}\,.$$

6. Osserviamo che $X+Y=4\,,\ X\in\{1,2,3,4\}\,,\ Y\in\{0,1,2,3\}$, pertanto

$$\mathcal{C}=\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}\,.$$

Inoltre, X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N=8, n=4, p=\frac{5}{8}$. Quindi

$$Var(X)=npq(1-\frac{n-1}{N-1})=4\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot(1-\frac{3}{7})=\frac{15}{28}\,.$$

Allora, essendo $Y=-X+4$, risulta

$$Cov(X,Y)=Cov(X,-X+4)=-Var(X)=-\frac{15}{28}\,.$$

7. Poichè $h_1(t)$ e $h_2(t)$ sono costanti, segue che T_1 e T_2 hanno distribuzione esponenziale di parametri rispettivamente $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$. Ovvero

$$f_1(t)=\begin{cases}3e^{-3t} & \text{se}\quad t\geq 0\\ 0 & \text{se}\quad t<0\end{cases}\quad;\quad f_2(t)=\begin{cases}e^{-t} & \text{se}\quad t\geq 0\\ 0 & \text{se}\quad t<0\end{cases}\,.$$

Calcoliamo la funzione di sopravvivenza di T. Si ha $T=\min\{T_1,T_2\}$ e quindi, per ogni $t>0$, si ha

$$S(t)=P(T>t)=P(\min\{T_1,T_2\}>t)=P[(T_1>t,T_2>t)]=$$

$$=P(T_1>t)P(T_2>t)=e^{-3t}e^{-t}=e^{-4t}\,.$$

Pertanto T ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda_1+\lambda_2=4$ e quindi, per ogni $t\geq 0$, si ha $h(t)=4$.

8. Si ha $\Theta\,|\,\mathbf{x}\sim N_{m_{10},\sigma_{10}}$, con

$$m_{10}=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\cdot m_0+\frac{10}{\sigma^2}\cdot\bar{x}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{10}{\sigma^2}}\,,\qquad \frac{1}{\sigma_{10}^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{10}{\sigma^2}\,,$$

e quindi, tenendo conto che $\bar{x}=m_0=1, \sigma_0=\sqrt{2}, \sigma=2$, segue

$$m_{10}=1\,,\qquad \sigma_{10}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Inoltre, $(\frac{\Theta-m_{10}}{\sigma_{10}})\ \mid\ \mathbf{x}\ =\ (\frac{\Theta-1}{1/\sqrt{3}})\ \mid\ \mathbf{x}\sim N_{0,1}$. Pertanto

$$\alpha=P[(\Theta>1-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\ \mid\ \mathbf{x}]=P[(\tfrac{\Theta-1}{1/\sqrt{3}}>-1)\ \mid\ \mathbf{x}]=$$

$$=1-P[(\tfrac{\Theta-1}{1/\sqrt{3}}\leq -1)\ \mid\ \mathbf{x}]=1-\Phi(-1)=\Phi(1)\simeq 0.8413\,.$$