Calcolo delle probabilità (8/1/2004)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Dato un numero aleatorio X, con densità $f(x) = \frac{3}{4}x^2$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{3}{4}$, per $x \in (1,2]$, con $f(x) = 0$ altrove, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

2. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è $\phi_X(t) = e^{3it-2t^2}$. Posto $Y = X - 3$, calcolare la covarianza di X, Y. $\quad (cov(X,Y) = \qquad\qquad)$

3. Due macchine M_1 ed M_2 si spostano con velocità aleatorie (costanti) X e Y verso un punto Q di ascissa 6. Nell'istante zero M_1 ed M_2 si trovano rispettivamente nell'origine e nel punto A di ascissa 3. Supposto che il vettore aleatorio (X,Y) abbia una distribuzione uniforme sull'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$, calcolare la probabilità p che M_1 arrivi nel punto Q prima di M_2. $\quad (p = \qquad\qquad)$

4. Da un lotto contenente 3 pezzi difettosi e 6 buoni si estraggono in blocco 4 pezzi. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i quattro estratti, calcolare la probabilità α che al massimo uno dei pezzi estratti sia difettoso, supposto che al massimo due dei pezzi estratti siano difettosi. $\quad (\alpha = \qquad\qquad)$

5. Il tempo di funzionamento fino al guasto di una data apparecchiatura è un numero aleatorio continuo X, con densità di probabilità $f(x) = \frac{(2+x)e^{-x}}{3}$, per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di rischio $h(x)$ di X.
$(h(x) = \qquad\qquad\qquad)$

6. Da un'urna contenente 6 biglietti, r dei quali sono abbinati ad una vincita, si estraggono 3 biglietti senza restituzione. Supposto $1 \leq r \leq 3$ e definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo biglietto estratto è vincente"*, $i = 1,2,3$, stabilire per quali valori di r si ha $P(E_1 \mid E_1 \vee E_2 \vee E_3) > \frac{1}{3}$.
$(r : \qquad\qquad)$

7. Un vettore aleatorio discreto (X,Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme

$$\mathcal{C} = \{(0,-4)\ ,\ \ (0,4)\ ,\ \ (1,0)\ ,\ \ (2,-4)\ ,\ \ (2,4)\}\ .$$

Calcolare l'equazione della retta di regressione di Y su X. $\quad (y = \qquad\qquad)$

8. Un vettore aleatorio continuo (X,Y) ha una densità di probabilità $f(x,y) = \frac{1}{3}(x+y)$, per $(x,y) \in \mathcal{C} = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Determinare le densità marginali condizionate $f_1(x|y)$, $f_2(y|x)$.

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases} \qquad\qquad f_2(y|x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta dell'8/1/2004.

1. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x > 2$. Per $0 < x \leq 1$, si ha
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{3}{4} t^2 dt = \cdots = \frac{x^3}{4}.$$
Per $1 < x \leq 2$, si ha
$$F(x) = P(X \leq 1) + P(1 < X \leq x) = \frac{1}{4} + \int_1^x \frac{3}{4} dt = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

2. Ricordando che, per una distribuzione normale con parametri m, σ, la funzione caratteristica è $e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, si ha $X \sim N_{3,2}$. Allora $cov(X, Y) = cov(X, X-3) = var(X) = 4$.

3. Si ha $\mu(\mathcal{C}) = 2$ e quindi $f(x, y) = \frac{1}{2}$ per $(x, y) \in \mathcal{C}$, con $f(x, y) = 0$ altrove. Inoltre M_1 arriva nel punto Q prima di M_2 se e solo se $\frac{6}{X} < \frac{3}{Y}$, ovvero se e solo se $Y < \frac{X}{2}$. Allora
$$p = \int_1^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{8}[x^2]_1^2 = \frac{3}{8}.$$

4. X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 9, n = 4, p = \frac{1}{3}$. Allora
$$\alpha = P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X=0)+P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} = \cdots$$
$$\cdots = \frac{\binom{3}{0}\binom{6}{4} + \binom{3}{1}\binom{6}{3}}{\binom{3}{0}\binom{6}{4} + \binom{3}{1}\binom{6}{3} + \binom{3}{2}\binom{6}{2}} = \frac{5}{8}.$$

5. Si ha
$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{(2+t)e^{-t}}{3} dt = \frac{2}{3} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt + \frac{1}{3} \int_x^{+\infty} t e^{-t} dt =$$
$$= \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{1}{3} \{[-te^{-t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t} dt\} = \frac{2}{3} e^{-x} + \frac{1}{3}(x+1)e^{-x} = \frac{(3+x)e^{-x}}{3}.$$
Allora, per ogni $x > 0$, si ha
$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{(2+x)e^{-x}}{3}}{\frac{(3+x)e^{-x}}{3}} = \frac{2+x}{3+x}.$$

6. Si ha: $P(E_i) = \frac{r}{6}$. Inoltre $P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c) P(E_2^c | E_1^c) P(E_3^c | E_1^c E_2^c)$, con
$$P(E_1^c) = \frac{6-r}{6}, \quad P(E_2^c | E_1^c) = \frac{5-r}{5}, \quad P(E_3^c | E_1^c E_2^c) = \frac{4-r}{4}.$$
Allora
$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1)}{1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c)} = \frac{\frac{r}{6}}{1 - \frac{6-r}{6} \cdot \frac{5-r}{5} \cdot \frac{4-r}{4}} = \cdots =$$
$$= \frac{20}{r^2 - 15r + 74} > \frac{1}{3} \iff r^2 - 15r + 14 < 0 \iff r > 1.$$

Metodo alternativo:

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = P[(E_1 \vee E_2) \vee E_3] = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3 \vee E_2E_3)\,,$$

con $P(E_iE_j) > 0 \Longleftrightarrow r > 1 \;\; (i \neq j)$, e quindi

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) < P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \Longleftrightarrow r > 1\,.$$

Allora

$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} > \frac{P(E_1)}{P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)} \Longleftrightarrow r > 1\,,$$

ed essendo $\frac{P(E_1)}{P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)} = \frac{1}{3}$ segue

$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) > \frac{1}{3} \Longleftrightarrow r > 1\,.$$

7. L'equazione della retta di regressione di Y su X è $y = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$. In generale, quindi, occorrerebbe calcolare il valore dei parametri $m_1, m_2, \rho, \sigma_1, \sigma_2$. In questo caso, basta calcolare m_2 e ρ. Infatti, si ha: $Y \in \{-4, 0, 4\}$, con

$$P(Y = -4) = P(Y = 4) = \frac{2}{5}\,, \;\; P(Y = 0) = \frac{1}{5}\,,$$

e quindi: $\mathbb{P}(Y) = 0$. Inoltre: $XY \in \{-8, 0, 8\}$, con

$$P(XY = -8) = P(XY = 8) = \frac{1}{5}\,, \;\; P(XY = 0) = \frac{3}{5}\,,$$

e quindi: $\mathbb{P}(XY) = 0$. Allora $\sigma_{XY} = \mathbb{P}(XY) - \mathbb{P}(X)\mathbb{P}(Y) = 0$. Pertanto $\rho = 0$ e l'equazione della retta di regressione è: $y = m_2$, cioè: $y = 0$.

8. Per ogni $x \in [1, 2]$, si ha

$$f_1(x) = \int_1^2 f(x, y)dy = \cdots = \frac{1}{3}(x + \frac{3}{2})\,,$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Analogamente, per ogni $y \in [1, 2]$, si ha

$$f_2(y) = \int_1^2 f(x, y)dx = \cdots = \frac{1}{3}(y + \frac{3}{2})\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto, ricordando che

$$f_1(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}\,, \qquad f_2(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}\,,$$

si ottiene

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \frac{x+y}{y+\frac{3}{2}}, & x \in [1, 2] \\ 0, & \textit{altrove} \end{cases} \quad (y \in [0, 2]); \qquad f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{y+x}{x+\frac{3}{2}}, & y \in [1, 2] \\ 0, & \textit{altrove} \end{cases} \quad (x \in [0, 2]).$$