Calcolo delle probabilità (8/1/2004)

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

1. Da un lotto contenente 4 pezzi difettosi e 8 buoni si estraggono in blocco 3 pezzi. Indicando con X il numero aleatorio di pezzi difettosi fra i tre estratti, calcolare la probabilità β che al massimo uno dei pezzi estratti sia difettoso, supposto che al massimo due dei pezzi estratti siano difettosi. $(\beta = \qquad\qquad)$

2. La funzione caratteristica di un numero aleatorio X è $\phi_X(t) = e^{-5it-3t^2}$. Posto $Y = X + 5$, calcolare la covarianza di X, Y. $(cov(X,Y) = \qquad\qquad)$

3. Due macchine M_1 ed M_2 si spostano con velocità aleatorie (costanti) X e Y verso un punto Q di ascissa 9. Nell'istante zero M_1 ed M_2 si trovano rispettivamente nell'origine e nel punto A di ascissa 3. Supposto che il vettore aleatorio (X,Y) abbia una distribuzione uniforme sull'insieme $\mathcal{C} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$, calcolare la probabilità p che M_1 arrivi nel punto Q prima di M_2. $(p = \qquad\qquad)$

4. Dato un numero aleatorio X, con densità $f(x) = \frac{3}{10}$, per $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{3}{10}x^2$, per $x \in (1,2]$, con $f(x) = 0$ altrove, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$.

$$F(x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

5. Un vettore aleatorio discreto (X,Y) ha una distribuzione uniforme sull'insieme

$$\mathcal{C} = \{(-3,0)\ ,\ \ (3,0)\ ,\ \ (0,1)\ ,\ \ (-3,2)\ ,\ \ (3,2)\}\ .$$

Calcolare l'equazione della retta di regressione di Y su X. $(y = \qquad\qquad)$

6. Un vettore aleatorio continuo (X,Y) ha una densità di probabilità $f(x,y) = \frac{1}{8}(x+y)$, per $(x,y) \in \mathcal{C} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2\}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Determinare le densità marginali condizionate $f_1(x|y), f_2(y|x)$.

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases} \qquad\qquad f_2(y|x) = \begin{cases} \qquad\qquad , \\ \qquad\qquad , \end{cases}$$

7. Da un'urna contenente 7 biglietti, r dei quali sono abbinati ad una vincita, si estraggono 3 biglietti senza restituzione. Supposto $1 \leq r \leq 4$ e definiti gli eventi $E_i =$ *"l'i-mo biglietto estratto è vincente"*, $i = 1,2,3$, stabilire per quali valori di r si ha $P(E_1 \mid E_1 \vee E_2 \vee E_3) > \frac{1}{3}$. $(r : \qquad\qquad)$

8. Il tempo di funzionamento fino al guasto di una data apparecchiatura è un numero aleatorio continuo X, con densità di probabilità $f(x) = \frac{(3+x)e^{-x}}{4}$, per $x \geq 0$, con $f(x) = 0$ altrove. Calcolare, per ogni $x > 0$, la funzione di rischio $h(x)$ di X. $(h(x) = \qquad\qquad\qquad)$

Calcolo delle probabilità

(Ing. Elettronica, Informatica, Telecomunicazioni - Latina)

Soluzioni della prova scritta dell'8/1/2004.

1. X ha una distribuzione ipergeometrica di parametri $N = 12, n = 3, p = \frac{1}{3}$. Allora

$$\beta = P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2) = \frac{P(X \leq 1, X \leq 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X \leq 1)}{P(X \leq 2)} = \frac{P(X=0)+P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)} = \cdots$$

$$\cdots = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}+\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{4}{0}\binom{8}{3}+\binom{4}{1}\binom{8}{2}+\binom{4}{2}\binom{8}{1}} = \frac{7}{9}\,.$$

2. Ricordando che, per una distribuzione normale con parametri m, σ, la funzione caratteristica è $e^{imt-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$, si ha $X \sim N_{-5,\sqrt{6}}$. Allora $cov(X,Y) = cov(X, X+5) = var(X) = 6\,.$

3. Si ha $\mu(\mathcal{C}) = 2$ e quindi $f(x,y) = \frac{1}{2}$ per $(x,y) \in \mathcal{C}$, con $f(x,y) = 0$ altrove. Inoltre M_1 arriva nel punto Q prima di M_2 se e solo se $\frac{9}{X} < \frac{6}{Y}$, ovvero se e solo se $Y < \frac{2}{3}X$. Allora

$$p = \int_{\frac{3}{2}}^{2} dx \int_{1}^{\frac{2}{3}x} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{2} (\frac{2}{3}x - 1)dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{3} - x]_{\frac{3}{2}}^{2} = \cdots = \frac{1}{24}\,.$$

4. Si ha $F(x) = 0$, per $x \leq 0$; $F(x) = 1$, per $x > 2$. Per $0 < x \leq 1$, si ha

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{3}{10} dt = \frac{3}{10}x.$$

Per $1 < x \leq 2$, si ha

$$F(x) = P(X \leq 1) + P(1 < X \leq x) = \frac{3}{10} + \int_1^x \frac{3}{10}t^2 dt = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}.$$

5. L'equazione della retta di regressione di Y su X è $y = m_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - m_1)$. In generale, quindi, occorrerebbe calcolare il valore dei parametri $m_1, m_2, \rho, \sigma_1, \sigma_2$. In questo caso, basta calcolare m_1, m_2 e ρ. Infatti, si ha: $X \in \{-3, 0, 3\}$, $Y \in \{0, 1, 2\}$, con

$$P(X = -3) = P(X = 3) = \frac{2}{5}\,,\;\; P(X = 0) = \frac{1}{5}\,,$$

$$P(Y = 0) = P(Y = 2) = \frac{2}{5}\,,\;\; P(Y = 1) = \frac{1}{5}\,,$$

e quindi: $I\!\!P(X) = 0$, $I\!\!P(Y) = 1$. Inoltre: $XY \in \{-6, 0, 6\}$, con

$$P(XY = -6) = P(XY = 6) = \frac{1}{5}\,,\;\; P(XY = 0) = \frac{3}{5}\,,$$

e quindi: $I\!\!P(XY) = 0$. Allora $\sigma_{XY} = I\!\!P(XY) - I\!\!P(X)I\!\!P(Y) = 0$. Pertanto $\rho = 0$ e l'equazione della retta di regressione è: $y = m_2$, cioè: $y = 1$.

6. Per ogni $x \in [0,2]$, si ha: $f_1(x) = \int_0^2 f(x,y)dy = \cdots = \frac{1}{4}(x+1)$, con $f_1(x) = 0$ altrove. Analogamente, per ogni $y \in [0,2]$, si ha

$$f_2(y) = \int_1^2 f(x,y)dx = \cdots = \frac{1}{4}(y+1)\,,$$

con $f_2(y) = 0$ altrove. Pertanto, ricordando che

$$f_1(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}\,, \qquad f_2(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)}\,,$$

si ottiene

$$f_1(x|y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2y+2}, & x \in [0,2] \\ 0, & \textit{altrove} \end{cases} \quad (y \in [0,2]); \qquad f_2(y|x) = \begin{cases} \frac{y+x}{2x+2}, & y \in [0,2] \\ 0, & \textit{altrove} \end{cases} \quad (x \in [0,2]).$$

7. Si ha: $P(E_i) = \frac{r}{7}$. Inoltre $P(E_1^c E_2^c E_3^c) = P(E_1^c)P(E_2^c|E_1^c)P(E_3^c|E_1^c E_2^c)$, con

$$P(E_1^c) = \frac{7-r}{7}\,,\;\; P(E_2^c|E_1^c) = \frac{6-r}{6}\,,\;\; P(E_3^c|E_1^c E_2^c) = \frac{5-r}{5}\,.$$

Allora

$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} = \frac{P(E_1)}{1 - P(E_1^c E_2^c E_3^c)} = \frac{\frac{r}{7}}{1 - \frac{7-r}{7}\cdot\frac{6-r}{6}\cdot\frac{5-r}{5}} = \cdots =$$

$$= \frac{30}{r^2 - 18r + 107} > \frac{1}{3} \iff r^2 - 18r + 17 < 0 \iff r > 1\,.$$

Metodo alternativo:

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) = P[(E_1 \vee E_2) \vee E_3] = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1E_2) - P(E_1E_3 \vee E_2E_3)\,,$$

con $P(E_iE_j) > 0 \iff r > 1 \;\; (i \neq j)$, e quindi

$$P(E_1 \vee E_2 \vee E_3) < P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) \iff r > 1\,.$$

Allora

$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \vee E_2 \vee E_3)} > \frac{P(E_1)}{P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)} \iff r > 1\,,$$

ed essendo $\frac{P(E_1)}{P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)} = \frac{1}{3}$ segue

$$P(E_1 \,|\, E_1 \vee E_2 \vee E_3) > \frac{1}{3} \iff r > 1\,.$$

8. Si ha

$$S(x) = P(X > x) = \int_x^{+\infty} \frac{(3+t)e^{-t}}{4}dt = \frac{3}{4}\int_x^{+\infty} e^{-t}dt + \frac{1}{4}\int_x^{+\infty} te^{-t}dt =$$

$$= \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}\{[-te^{-t}]_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} e^{-t}dt\} = \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} = \frac{(4+x)e^{-x}}{4}\,.$$

Allora, per ogni $x > 0$, si ha

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{(3+x)e^{-x}}{4}}{\frac{(4+x)e^{-x}}{4}} = \frac{3+x}{4+x}\,.$$