Nome e cognome: *Matr.:*

CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 12 luglio 2004

Ing. Gestionale (Canali $1-2-3$).

Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dati tre eventi A, B, C, con $A \wedge C = \emptyset$, verificare se la valutazione $P(A) = P(B) = P(C) = 0.4$, $P(A \wedge B) = P(B \wedge C) = 0.2$ è coerente. Inoltre, considerato il numero aleatorio $X = |A| - |A \wedge B| - |B| + |B \wedge C|$, calcolare la previsione di X.

   Coerenti? (Si) (No) $\mathbb{P}(X) =$

2. Fra 28 scatole di componenti elettronici, una contiene pezzi di cui il 25% sono buoni, mentre le altre 27 contengono in parti uguali pezzi difettosi e pezzi buoni. Si estrae a "caso" una scatola e da questa si estraggono con restituzione 3 pezzi, che risultano tutti buoni (sia E questo evento). Se H_0 è l'evento "la scatola estratta è quella che contiene il 25% di pezzi buoni", calcolare $P(H_0|E)$ e determinare se E ed H_0 sono stocasticamente indipendenti.

   $$P(H_0|E) =$$

   E ed H_0 sono stocasticamente indipendenti ? (Si) (No)

3. La funzione di ripartizione di un numero aleatorio X, continuo e non negativo, è

   $$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & \text{per } x \geq 0 \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

   Posto $Y = 3X + 1$, calcolare: (i) la previsione di Y; (ii) la probabilità p dell'evento $(7 \leq Y \leq 16)$; (iii) la funzione di sopravvivenza di Y.

   $\mathbb{P}(Y) =$ $p =$ $S_Y(y) = \begin{cases} & ; \\ & . \end{cases}$

4. Tre amici si sono dati appuntamento nell'istante 0 in una stazione ferroviaria S per prendere uno stesso treno, il quale parte in un fissato istante $t \in (0, 1)$. Supposto che tali amici arrivino in tre istanti aleatori X, Y, Z, indipendenti e con distribuzione uniforme in $[0, 1]$, e definiti gli eventi

   $$A = (X < t), \quad B = (Y < t), \quad C = (Z < t),$$

   calcolare la probabilità α che almeno due dei tre amici riescano a prendere il treno.

   $\alpha =$

Soluzioni

1. I costituenti sono

$$C_1 = AB^cC^c \quad C_2 = ABC^c \quad C_3 = A^cBC^c \quad C_4 = A^cBC \quad C_5 = A^cB^cC \quad C_6 = A^cB^cC^c.$$

   Il seguente sistema

$$\begin{cases} P(A) = 0.4 = x_1 + x_2 \\ P(B) = 0.4 = x_2 + x_3 + x_4 \\ P(C) = 0.4 = x_4 + x_5 \\ P(AB) = 0.2 = x_2 \ \ , P(BC) = 0.2 = x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 1, \ \ x_i \geq 0, \ \ i = 1 \ldots 6 \end{cases}$$

   ammette la soluzione $(0.2, 0.2, 0, 0.2, 0.2, 0.2)$ pertanto la valutazione è coerente. Infine

$$\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(|A|) - \mathbb{P}(|A \wedge B|) + \mathbb{P}(|B|) - \mathbb{P}(|B \wedge C|) = P(A) - P(A \wedge B) - P(B) + P(B \wedge C) = 0.$$

2. Sia H_i="La scatola estratta è la i-esima tra quelle che contengono in parti uguali pezzi buoni e pezzi difettosi", con $i = 1, \ldots, 27$. Si hanno le seguenti probabilità

$$P(E|H_0) = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \quad P(E|H_i) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{per} \ \ i = 1 \ldots 27, \quad P(H_i) = \frac{1}{28} \ \ \text{per} \ \ i = 0 \ldots 27$$

   Applicando il teorema di Bayes si ottiene

$$\begin{aligned} P(H_0|E) &= \frac{P(E|H_0)P(H_0)}{P(E|H_0)P(H_0) + \sum_{i=1}^{27} P(E|H_i)P(H_i)} = \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{28}}{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{28} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{27}{28}} = \frac{1}{1 + 27 \cdot 8} = \frac{1}{217}. \end{aligned}$$

   Gli eventi E ed H_0 non sono stocasticamente indipendenti, infatti si ha $P(H_0) \neq P(H_0|E)$.

3. X ha una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$; quindi $\mathbb{P}(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$. Pertanto

$$\mathbb{P}(Y) = 3\mathbb{P}(X) + 1 = 3\,\frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}\,.$$

   Inoltre

$$p = P(7 \leq Y \leq 16) = P(7 \leq 3X+1 \leq 16) = P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = e^{-4} - e^{-10} \simeq 0.1353\,.$$

   Infine, fissato $y > 1$ si ha

$$S_Y(y) = P(Y > y) = P(3X + 1 > y) = P\left(X > \frac{y-1}{3}\right) = S_X\left(\frac{y-1}{3}\right) = e^{-\frac{2(y-1)}{3}}\,,$$

   mentre per $y \leq 1$ si ha $S_Y(y) = 1$.

4. X, Y, Z hanno la stessa densità di probabilità f, data da

$$f(x) = 1\,, \ x \in [0, 1]\,; \quad f(x) = 0\,, \ x \notin [0, 1]\,.$$

   Quindi

$$P(A) = P(B) = P(C) = \int_0^t f(x)\, dx = t\,.$$

   Pertanto

$$\begin{aligned} \alpha &= P(A \wedge B \wedge C^c) + P(A \wedge B^c \wedge C) + P(A^c \wedge B \wedge C) + P(A \wedge B \wedge C) = \\ &= 3t^2(1-t) + t^3 = 3t^2 - 2t^3 = t^2(3 - 2t). \end{aligned}$$