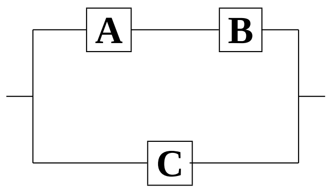
Calcolo delle probabilità e statistica (18/7/2006)

(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)

____________ matricola   ____________ cognome   ____________ nome

Scrivere le risposte negli appositi spazi   *Motivare dettagliatamente le risposte su fogli allegati*

1. Nel dispositivo di figura i tre componenti **A**, **B** e **C** hanno probabilità di funzionamento pari rispettivamente a $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$. Supposto che il dispositivo funzioni, e che i tre componenti siano indipendenti, calcolare la probabilità α che il componente **A** funzioni.



$\alpha =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 - \frac{y^2}{2}}$, $(x, y) \in I\!R^2$. Calcolare la probabilità p dell'evento $(X > \frac{1}{2}, Y > -1)$.

$p =$

3. Il codominio di un vettore aleatorio discreto (X, Y) è l'insieme

$$\mathcal{C} = \{(-2, -1)\,, (-2, 1)\,, (0, -1)\,, (0, 0)\,, (0, 1)\,, (2, -1)\,, (2, 1)\}\,.$$

Posto $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$, si assuma : (i) $p(0, 0) = \frac{1}{2}$; (ii) tutti gli altri punti sono equiprobabili. Calcolare la covarianza di X, Y e stabilire se X e Y sono stocasticamente indipendenti.

$Cov(X, Y) =$ X, Y *indipendenti?*

4. Il coefficiente di correlazione ρ di due numeri aleatori X, Y è $\frac{1}{3}$. Inoltre, le funzioni caratteristiche di X e Y sono rispettivamente $\varphi_X(t) = e^{it - \frac{t^2}{2}}$ e $\varphi_Y(t) = e^{-\frac{t^2}{8}}$. Calcolare la varianza del numero aleatorio $Z = X - Y$.

$Var(Z) =$

Calcolo delle probabilità e statistica *(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 18/7/2006.

1. Ponendo $A =$"il componente $\boxed{\mathbf{A}}$ funziona", $B =$"il componente $\boxed{\mathbf{B}}$ funziona", $C =$"il componente $\boxed{\mathbf{C}}$ funziona", si ha

$$\alpha = P\left[A|(A \wedge B) \vee C\right] = \frac{P\left\{A \wedge [(A \wedge B) \vee C]\right\}}{P\left[(A \wedge B) \vee C\right]} = \frac{P\left[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\right]}{P(A \wedge B) + P(C) - P(A \wedge B \wedge C)} =$$

$$= \frac{P(A \wedge B) + P(A \wedge C) - P(A \wedge B \wedge C)}{P(A \wedge B) + P(C) - P(A \wedge B \wedge C)} .$$

Poiché A, B, C sono indipendenti, si ha

$$\alpha = \frac{P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C)}{P(A)P(B) + P(C) - P(A)P(B)P(C)} = \frac{P(B) + P(C) - P(B)P(C)}{P(B) + \frac{P(C)}{P(A)} - P(B)P(C)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}\frac{1}{3}}{\frac{2}{5} + \frac{4}{3} - \frac{2}{5}\frac{1}{3}} = \frac{6+5-2}{6+20-2} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} .$$

2. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 - \frac{y^2}{2}}\, dy = \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2} , \quad \forall\, x ,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-2x^2 - \frac{y^2}{2}}\, dx = \cdots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} , \quad \forall\, y ,$$

con $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ per ogni (x,y). Pertanto X ed Y sono stocasticamente indipendenti; inoltre, X ha una distribuzione normale di parametri $m_1 = 0, \sigma_1 = \frac{1}{2}$, mentre Y ha una distribuzione normale standard. Allora

$$p = P\left(X > \frac{1}{2}, Y > -1\right) = P\left(X > \frac{1}{2}\right) P(Y > -1) = \left[1 - P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)\right]\left[1 - P(Y \leq -1)\right] =$$

$$= \left[1 - \Phi\left(\frac{\frac{1}{2} - 0}{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[1 - \Phi(-1)\right] = \left[1 - \Phi(1)\right]\Phi(1) \;\simeq\; (1 - 0.8413) \times 0.8413 \;\simeq\; 0.1335 .$$

3. Posto $p(x,y) = p$, per $(x,y) \neq (0,0)$, si ha $\frac{1}{2} + 6p = 1$ e quindi $p = \frac{1}{12}$. Inoltre

$$X \in \{-2, 0, 2\} , \quad Y \in \{-1, 0, 1\} , \quad XY \in \{-2, 0, 2\} ,$$

con

$$P(X = -2) = P(X = 2) = \frac{1}{6} , \quad P(X = 0) = \frac{2}{3} ;$$

$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{4} , \quad P(Y = 0) = \frac{1}{2} ;$$

$$P(XY = -2) = P(XY = 2) = \frac{1}{6} , \quad P(XY = 0) = \frac{2}{3} .$$

Pertanto $\mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y) = \mathbb{P}(XY) = 0$ e quindi $Cov(X,Y) = 0$. Inoltre, osservando ad esempio che

$$P(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{2} \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} ,$$

segue che X e Y non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha $Var(Z) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X, Y)$, inoltre

$$\varphi'_X(t) = (i - t)e^{it - \frac{t^2}{2}}\,, \qquad \varphi'_Y(t) = -\frac{t}{4}e^{-\frac{t^2}{8}}\,;$$

$$\varphi''_X(t) = (i - t)^2 e^{it - \frac{t^2}{2}} - e^{it - \frac{t^2}{2}}\,, \qquad \varphi''_Y(t) = \frac{t^2}{16}e^{-\frac{t^2}{8}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{t^2}{8}}\,.$$

Quindi

$$\varphi'_X(0) = i = i\mathbb{P}(X)\,, \quad \varphi'_Y(0) = 0 = i\mathbb{P}(Y)\,.$$

$$\varphi''_X(0) = i^2 - 1 = -2 = i^2\mathbb{P}(X^2)\,, \quad \varphi''_Y(0) = -\frac{1}{4} = i^2\mathbb{P}(Y^2)\,.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(X) = 1\,, \quad \mathbb{P}(Y) = 0\,, \quad \mathbb{P}(X^2) = 2\,, \quad \mathbb{P}(Y^2) = \frac{1}{4}\,.$$

Allora

$$Var(X) = \mathbb{P}(X^2) - [\mathbb{P}(X)]^2 = 1\,, \quad Var(Y) = \mathbb{P}(Y^2) - [\mathbb{P}(Y)]^2 = \frac{1}{4}\,,$$

$$Cov(X, Y) = \rho\sigma_X\sigma_Y = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\,,$$

da cui segue $Var(Z) = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$.
(La stessa conclusione si ottiene osservando direttamente che dalla struttura delle funzioni caratteristiche segue $X \sim N_{1,1}\,,\ Y \sim N_{0,\frac{1}{2}}$*)*