Calcolo delle probabilità e statistica (21/9/2006)

(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)

1. Dati tre eventi A, B, C, con

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}\,,\; P(AB) = P(AC) = P(BC) = \frac{1}{5}\,,\; P(ABC) = \frac{1}{20}\,,$$

calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $(AB \mid AB^c \vee BC^c \vee A^cC)$.

$$p =$$

2. Un sistema è costituito da due dispositivi in parallelo A e B, con B che entra in funzione nell'istante in cui si guasta A e con tempi aleatori di durata rispettivamente X e Y. Supposto che la densità congiunta del vettore aleatorio (X, Y) sia $f(x, y) = e^{-x-y}$, per $x \geq 0, y \geq 0$, con $f(x, y) = 0$ altrove, calcolare la previsione m del tempo aleatorio fino al guasto del sistema.

$$m =$$

3. Un'urna U_1 contiene 6 palline bianche e 4 nere, una seconda urna U_2 contiene 4 palline bianche e 6 nere. Davide sceglie a caso un'urna da cui estrarre in blocco 5 palline ; sapendo che ha ottenuto 3 palline bianche e 2 nere, determinare la probabilità α che abbia estratto dalla prima urna.

4. Un numero aleatorio $X > 0$ ha funzione di rischio $h(x) = 2x^3$. Determinare la densità di probabilità per $x > 0$.

Calcolo delle probabilità e statistica *(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 21/9/2006.

1. Si ha

$$p = P(AB \,|\, AB^c \vee BC^c \vee A^cC) = P(ABC \vee ABC^c \,|\, AB^c \vee BC^c \vee A^cC) =$$

$$= P(ABC^c \,|\, AB^c \vee BC^c \vee A^cC) = \frac{P(ABC^c)}{P(AB^c \vee BC^c \vee A^cC)} = \frac{P(ABC^c)}{P(AB^c) + P(BC^c) + P(A^cC)},$$

con

$$P(AB^c) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}, \quad P(BC^c) = P(A^cC) = \cdots = \frac{3}{10};$$

e con $P(ABC^c) = P(AB) - P(ABC) = \frac{3}{20}\cdot$ Pertanto : $p = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{6}\cdot$

2. Posto $Z = X + Y$, si ha

$$m = I\!P(Z) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (x+y)\, e^{-x-y}\, dxdy = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x\, e^{-x-y}\, dxdy + \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} y\, e^{-x-y}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{+\infty} x\, dx \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\, dy + \int_0^{+\infty} y\, dy \int_0^{+\infty} e^{-x-y}\, dx = \cdots = 1 + 1 = 2\,.$$

In modo equivalente : si ricava

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy = e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}\,, \quad x > 0\,.$$

Analogamente, si trova $f_Y(y) = e^{-y}$ per $y > 0$. Si nota che X e Y hanno entrambi distribuzione esponenziale con parametro $\lambda = 1$; quindi $I\!P(X) = I\!P(Y) = 1$. Pertanto

$$m = I\!P(Z) = I\!P(X+Y) = I\!P(X) + I\!P(Y) = 1 + 1 = 2\,.$$

3. Introducendo gli eventi H_1 =“Davide ha estratto dall'urna U_1”, H_2 =“Davide ha estratto dall'urna U_2”, E =“Davide ha ottenuto 3 palline bianche e 2 nere”, si ha $P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2}$. Quindi

$$\alpha = P(H_1|E) = \frac{P(E|H_1)P(H_1)}{P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2)} = \frac{P(E|H_1)}{P(E|H_1) + P(E|H_2)}\,.$$

Nel calcolo di $P(E|H_1)$ applichiamo la distribuzione ipergeometrica con $N = 10, n = 5, pN = 6$, ottenendo $P(E|H_1) = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{20\cdot 6}{252} = \dfrac{10}{21}$.

Nel calcolo di $P(E|H_2)$ applichiamo la distribuzione ipergeometrica con $N = 10, n = 5, pN = 4$, ottenendo $P(E|H_2) = \dfrac{\binom{4}{3}\binom{6}{2}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{4\cdot 15}{252} = \dfrac{5}{21}$.

Allora : $\alpha = \dfrac{P(E|H_1)}{P(E|H_1) + P(E|H_2)} = \dfrac{\frac{10}{21}}{\frac{10}{21} + \frac{5}{21}} = \dfrac{10}{10+5} = \dfrac{2}{3}$.

4. Con semplici calcoli si trova $\displaystyle\int_0^x h(t)dt = \int_0^x 2t^3 dt = 2\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{2}$, da cui $S(x) = \exp\left[-\dfrac{x^4}{2}\right]$.

Segue : $f(x) = h(x)S(x) = 2x^3 e^{-\frac{x^4}{2}}$.