**Calcolo delle probabilità e statistica** (22/4/2006)

*(Ing. Informatica - Roma)*

1. Da un'urna, contenente sei palline, di cui due numerate con il numero 0, tre con il numero 1 e una con il numero 2, si effettuano due estrazioni senza restituzione. Indicando con $X$ il risultato della prima estrazione e con $Y$ il risultato della seconda estrazione, sia $Z = X+Y$. Calcolare la probabilità dell'evento $(Z \leq 0)$.

$$P(Z \leq 0) =$$

2. Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare la funzione caratteristica del n.a. $Z$.

$$\varphi_Z(t) =$$

3. Dati due n. a. $X, Y$ incorrelati e con distribuzione normale standard, calcolare il coefficiente di correlazione $\rho$ dei n. a. $U = 2X + Y$, $V = X - 2Y$.

$$\rho =$$

4. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo $(X, Y)$ è $f(x, y) = ax + by$, per $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, con $a > 0, b > 0$ e con $f(x, y) = 0$ altrove. Esprimere la densità $f(x, y)$ utilizzando solo la costante $a$. Inoltre, determinare il valore di $a$ tale che $P(X \leq Y) = P(X > Y)$.

$$f(x, y) = \qquad\qquad\qquad a =$$

5. Con riferimento all'esercizio precedente, assumendo $a = 1$, determinare la funzione di ripartizione marginale $F_1(x)$.

$$F_1(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \end{cases}$$

**Calcolo delle probabilità e statistica** *(Ing. Informatica - Roma)*
*Soluzioni della prova scritta del 22/4/2006.*

1. Si ha $(Z \leq 0) = (Z = 0) = (X = 0, Y = 0)$; pertanto

$$P(Z \leq 0) = P(X = 0, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 0 \,|\, X = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,.$$

2. Si ha $Z \in \{0, 1, 2, 3\}$, con

$$P(Z = 0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}\,;$$

$$P(Z = 1) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}\,;$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 0) + P(X = 0, Y = 2) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3}\,;$$

$$P(Z = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\,.$$

Pertanto

$$\varphi_Z(t) = I\!P(e^{itZ}) = \sum_h p_h e^{itz_h} = \frac{1 + 6e^{it} + 5e^{2it} + 3e^{3it}}{15}\,.$$

3. Si ha $I\!P(X) = I\!P(Y) = 0$ e quindi $I\!P(2X + Y) = I\!P(X - 2Y) = 0$; inoltre

$$I\!P(X^2) = I\!P(Y^2) = 1\,, \quad I\!P(XY) = I\!P(X)I\!P(Y) = 0\,.$$

Pertanto

$$Cov(U, V) = Cov(2X + Y, X - 2Y) = I\!P[(2X + Y)(X - 2Y)] - I\!P(2X + Y)I\!P(X - 2Y) =$$

$$= I\!P(2X^2 - 3XY - 2Y^2) = 2I\!P(X^2) - 3I\!P(XY) - 2I\!P(Y^2) = 0\,.$$

Quindi: $\rho = 0$.

4. Si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 (ax + by)\, dxdy = \cdots = \frac{a + b}{2} = 1\,;$$

pertanto $b = 2 - a$ e quindi: $f(x, y) = ax + (2 - a)y$. Inoltre

$$P(X \leq Y) = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x, y)\, dy = \int_0^1 dx \int_x^1 [ax + (2 - a)y]\, dy = \cdots = \frac{2}{3} - \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \iff a = 1\,.$$

5. Per $x \in [0,1]$ si ha

$$f_1(x) = \int_0^1 (x+y)dy = \cdots = x + \frac{1}{2},$$

con $f_1(x) = 0$ altrove. Pertanto $F_1(x) = 0$ per $x \leq 0$, $F_1(x) = 1$ per $x \geq 1$. Inoltre, per $0 < x < 1$, si ha

$$F_1(x) = \int_0^x (t + \frac{1}{2})dt = \cdots = \frac{x^2 + x}{2}.$$