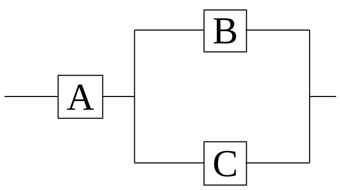
Calcolo delle probabilità e statistica (11/1/2007)

(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)

________________ matricola   ________________ cognome   ________________ nome

Scrivere le risposte negli appositi spazi   *Motivare dettagliatamente le risposte su fogli allegati*

1. Nel dispositivo di figura i componenti **B** e **C** sono indipendenti tra loro e hanno entrambi probabilità pari a $\frac{3}{5}$ di funzionare. Inoltre, il componente **A** funziona con probabilità $\frac{4}{5}$ nell'ipotesi che **B** funzioni, con probabilità $\frac{3}{4}$ nell'ipotesi che **C** funzioni, e con probabilità $\frac{2}{3}$ nell'ipotesi che sia **B** che **C** funzionino. Calcolare la probabilità α che il dispositivo funzioni.



$\alpha =$

2. La densità congiunta di un vettore aleatorio continuo (X, Y) è $f(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare la previsione m e lo scarto quadratico medio σ del numero aleatorio $\frac{X+Y}{2}$.

$m =$ $\sigma =$

3. Date 8 scatole di componenti elettronici, in una il 25% dei pezzi sono difettosi, mentre le altre 7 contengono in parti uguali pezzi difettosi e pezzi buoni. Si sceglie a "caso" una scatola e da questa si estraggono con restituzione 3 pezzi, che risultano tutti buoni (sia E questo evento). Se H è l'evento "la scatola scelta a caso è quella che contiene il 25% di pezzi difettosi", calcolare $P(H|E)$ e stabilire se E ed H sono stocasticamente indipendenti.

$P(H|E) =$ $E\,,\ H \quad stocasticamente\ indipendenti\,?$

4. Un sistema è composto da due dispositivi in parallelo A e B, con B che entra in funzione nell'istante in cui si guasta A. I tempi di durata fino al guasto di A e B sono due numeri aleatori X e Y stocasticamente indipendenti e con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$. Calcolare la probabilità condizionata p che il sistema si guasti nell'intervallo $[0, 5]$, supposto che nell'istante 2 il dispositivo A sia ancora in funzione.

$p =$

Calcolo delle probabilità e statistica *(Ing. Informatica - Ing. Automatica - Roma)*
Soluzioni della prova scritta del 11/1/2007.

1. Ponendo
$A =$"il componente $\boxed{\mathbf{A}}$ funziona", $B =$"il componente $\boxed{\mathbf{B}}$ funziona", $C =$"il componente $\boxed{\mathbf{C}}$ funziona", si ha

$$\alpha = P\left[A \wedge (B \vee C)\right] = P\left[(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\right] = P(A \wedge B) + P(A \wedge C) - P(A \wedge B \wedge C) =$$

$$= P(A|B)P(B) + P(A|C)P(C) - P\left[A|(B \wedge C)\right] P(B \wedge C)\,.$$

Dai dati del problema si ha

$$P(B) = P(C) = \frac{3}{5}\,, \quad P(A|B) = \frac{4}{5}\,, \quad P(A|C) = \frac{3}{4}\,, \quad P\left[A|(B \wedge C)\right] = \frac{2}{3}\,, \quad P(B \wedge C) = \frac{9}{25}\,,$$

e quindi : $\alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{12}{25} + \frac{9}{20} - \frac{6}{25} = \frac{69}{100}$.

2. Si ha

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+y^2)}\, dy = \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-2x^2}\,; \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+y^2)}\, dx = \cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-2y^2}\,;$$

pertanto X e Y hanno una distribuzione normale di parametri $m_1 = m_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$. Inoltre, $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,,\ \forall\,(x,y)$, e quindi X e Y sono stocasticamente indipendenti; di conseguenza $Cov(X,Y) = 0$. Allora

$$m = \mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) = 0\,; \quad \sigma = \sqrt{Var\left(\frac{X+Y}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

3. Si ha

$$P(H) = \frac{1}{8}\,, \quad P(E|H) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}\,, \quad P(E|H^c) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\,.$$

Pertanto

$$P(H|E) = \frac{P(H)P(E|H)}{P(H)P(E|H) + P(H^c)P(E|H^c)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{27}{64}}{\frac{1}{8} \cdot \frac{27}{64} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{27}{27+56} = \frac{27}{83}\,.$$

Infine, essendo $P(H|E) \neq P(H)$, gli eventi E ed H non sono stocasticamente indipendenti.

4. Si ha $p = P(X+Y \leq 5\,|\,X \geq 2) = \frac{P(X+Y \leq 5\,,\,X \geq 2)}{P(X \geq 2)}$, con $P(X \geq 2) = \int_2^{+\infty} e^{-x}\, dx = \cdots = e^{-2}$. Inoltre, tenendo conto che $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, si ha

$$P(X+Y \leq 5\,,\ X \geq 2)) = \int_2^5 dx \int_0^{(5-x)} e^{-x-y}\, dy = \int_2^5 e^{-x}\left(1 - e^{-(5-x)}\right)\, dx =$$

$$= \int_2^5 e^{-x}\, dx - \int_2^5 e^{-5}\, dx = e^{-2} - e^{-5} - 3e^{-5} = e^{-2} - 4e^{-5}\,.$$

Pertanto $p = \frac{e^{-2} - 4e^{-5}}{e^{-2}} = 1 - 4e^{-3}$.