CALCOLO DELLE PROBABILITA' - 17 Dicembre 2003
Scrivere le risposte negli appositi spazi
Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Gestionale (Canali $1-2-3$**).**

Nome e cognome**:**

1. Dati gli eventi E_1, E_2, E_3, E_4, con $E_1E_2 = \emptyset,\ E_1 \subset E_3,\ E_2 \subset E_3,\ E_4 \subset E_3^c$, determinare l'insieme $\mathcal{C}$ dei costituenti e stabilire per quali valori di p_2 e p_4 è coerente l'assegnazione di probabilità
$$P(E_1) = 2p_2,\ P(E_2) = p_2,\ P(E_3) = \frac{1}{2},\ P(E_4) = p_4,\ P(E_1^cE_3) = \frac{1}{4}.$$

$\mathcal{C} = \{ \qquad \};\ \ p_2 = \qquad p_4 \in [\quad,\quad];$

2. Sia X un numero aleatorio continuo con densità
$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0,1], \\ k, & x \in (1,a], \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$
Determinare i valori di k ed a in modo tale che si abbia $P(0 \leq X \leq 1) = P(1 \leq X \leq a)$. Inoltre, calcolare la funzione di ripartizione $F(x)$.

$k = \qquad;\qquad a = \qquad;\qquad F(x) = \begin{cases} & , \\ & , \\ & , \\ & , \end{cases}$

3. Una persona, a partire dall'istante 0, attende ad una fermata l'arrivo del primo fra due autobus A e B. Tali autobus arrivano in due istanti aleatori X, Y, stocasticamente indipendenti e con la stessa densità di probabilità $f_1(t) = f_2(t) = \frac{2-t}{2}$, per $t \in [0,2]$, con $f_1(t) = f_2(t) = 0$ altrove. Assumendo che il tempo sia misurato in ore e indicando con Z il tempo aleatorio di attesa di tale persona, calcolare la probabilità α che tale persona debba attendere più di 1 ora alla fermata. Inoltre, determinare la probabilità β che l'autobus A arrivi prima dell'autobus B.

$\alpha =$ $\qquad\qquad$ $\beta =$

4. Un'urna contiene N biglietti, r dei quali sono abbinati alla vincita di una somma di denaro. Tre persone, I_1, I_2, I_3, estraggono un biglietto a testa senza restituzione. Definiti gli eventi $E_j =$ *il biglietto estratto da* I_j *è vincente*, $j = 1,2,3$, calcolare la probabilità p dell'evento condizionato $E_1|E_3$ e stabilire per quali valori di r si ha $P(E_2\,|\,E_1 \vee E_2) > \frac{1}{2}$.

$p =$ $\qquad\qquad$ $r =$

Soluzioni (17/12/03, Ing. Ges. Roma)

1. I costituenti possibili sono
$$\mathcal{C} = \{E_1,\ E_2,\ E_1^c E_2^c E_3,\ E_4,\ E_3^c E_4^c\}\,.$$
Osservando che
$$E_3 = E_1 E_3 \vee E_1^c E_3 = E_1 \vee E_1^c E_3$$
si ha
$$P(E_1) = P(E_3) - P(E_1^c E_3) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = 2p_2,$$
e quindi $p_2 = \frac{1}{8}$. Per quanto riguarda p_4, poichè $E_4 \subseteq E_3^c$ si ha $0 \le P(E_4) \le 1 - \frac{1}{2}$ e quindi $p_4 \in [0, \frac{1}{2}]$. Per i costituenti $E_1^c E_2^c E_3,\ E_3^c E_4^c$ si ha
$$P(E_1^c E_2^c E_3) = P(E_3) - P(E_1) - P(E_2) = \frac{1}{8}, \quad P(E_3^c E_4^c) = 1 - p_4 \in [0, \frac{1}{2}].$$
In conclusione, l'assegnazione è coerente per $p_2 = \frac{1}{8},\ p_4 \in [0, \frac{1}{2}]$.

2. Essendo $P(0 \le X \le 1) = P(1 \le X \le a) = \frac{1}{2}$, segue
$$P(0 \le X \le 1) = \int_0^1 kx^2 dx = k\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{k}{3} = \frac{1}{2},$$
e quindi $k = \frac{3}{2}$. Inoltre
$$P(1 \le X \le a) = \int_1^a \frac{3}{2} dx = \frac{3}{2}\,[x]_1^a = \frac{3}{2}(a-1) = \frac{1}{2},$$
e quindi $a = \frac{4}{3}$. Per la funzione di ripartizione si ha $F(x) = 0$, per $x \le 0$; $F(x) = 1$, per $x > \frac{4}{3}$. Per $0 < x \le 1$, si ha
$$F(x) = P(X \le x) = \int_0^x \frac{3}{2} t^2 dt = \cdots = \frac{x^3}{2}.$$
Per $1 < x \le \frac{4}{3}$, si ha
$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{2} + \int_1^x \frac{3}{2} dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2} t\right]_1^x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x-1) = \frac{3}{2}x - 1.$$

3. Si ha: $P(X > 1) = P(Y > 1) = \int_1^2 \frac{2-t}{2} dt = \cdots = \frac{1}{4}\,.$
Allora, tenendo conto che $(Z > 1) = (X > 1, Y > 1)$, si ha
$$\alpha = P(Z > 1) = P(X > 1, Y > 1) = P(X > 1)P(Y > 1) = \frac{1}{16}\,.$$
Inoltre
$$\beta = P(X < Y) = \int_0^2 dx \int_x^2 f(x,y) dx dy = \int_0^2 \frac{2-x}{2} dx \int_x^2 \frac{2-y}{2} dx dy = \cdots = \frac{1}{2}\,.$$

4. Si ha: $P(E_3) = P(E_1) = \frac{r}{N}$. Inoltre
$$p = P(E_1|E_3) = \frac{P(E_1E_3)}{P(E_3)} = \frac{P(E_1E_2E_3) + P(E_1E_2^cE_3)}{P(E_3)} = \cdots = \frac{r-1}{N-1}\,.$$
Infine
$$P(E_2\,|\,E_1 \vee E_2) = \frac{P(E_2)}{P(E_1 \vee E_2)} = \frac{P(E_2)}{1 - P(E_1^cE_2^c)} = \frac{\frac{r}{N}}{1 - \frac{N-r}{N} \cdot \frac{N-1-r}{N-1}} = \frac{N-1}{2N-1-r} > \frac{1}{2} \iff r > 1\,.$$
Infatti: $P(E_1E_2) > 0 \iff r > 1$; quindi
$$P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2) < P(E_1) + P(E_2) \iff r > 1\,.$$
Allora, tenendo conto che $\frac{P(E_2)}{P(E_1)+P(E_2)} = \frac{1}{2}$, si ha
$$P(E_2\,|\,E_1 \vee E_2) = \frac{P(E_2)}{P(E_1) + P(E_2) - P(E_1E_2)} > \frac{P(E_2)}{P(E_1) + P(E_2)} = \frac{1}{2} \iff r > 1\,.$$