

.....
COGNOME E NOME

.....
MATRICOLA

E1	E2	E3	E4	D1	D2	D3	

.....
FIRMA

ANALISI MATEMATICA I (12 CFU) - Canale A-L
Ingegneria Informatica ed Automatica - Sapienza Università di Roma

10/01/19

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+2} e^{|x-1|},$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (5 punti)

Studiare in $(0, 0)$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^6 + |y|} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Esercizio 3 (5 punti) Scrivere la soluzione generale della seguente equazione differenziale

$$x' = \frac{2t}{t^2 - 1}x + \frac{4t}{1 - t^2} \quad \text{dove } t \in (-1, 1).$$

.....
Esercizio 4 (5 punti)

Studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\log\left(1 - \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^{\alpha}}{\arctan^{\alpha} n}$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere la definizione di limite di una funzione di una variabile reale.

.....

Domanda 2 (4 punti)

Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$(z + i)^8 = (z + i)^2.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni $n \geq 1$.

.....
 COGNOME E NOME MATRICOLA

E1	E2	E3	E4	E5	D1	D2	D3

.....
 FIRMA

ANALISI MATEMATICA I (12 CFU) - Canale I
 Ingegneria Informatica e Automatica - Sapienza Università di Roma

05/02/19

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x| - 1}}{x^2 + 4},$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (4 punti)

Dopo aver disegnato il seguente dominio di \mathbb{R}^2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y\},$$

calcolare il seguente integrale doppio

$$\int \int_D e^{x^2+y^2} dx dy.$$

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} - \cos x^2)}{\log(1+x) - \sin x}$$

Esercizio 4 (4 punti)

Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|2\alpha + 1|^k}{k(k^2 + 1)}.$$

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 1 = 2x + 1, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere la definizione di limite di una funzione di due variabili reali.

.....

Domanda 2 (3 punti)

Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$\left(\frac{z}{i}\right)^{16} = i + 1.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Dimostrare per induzione la seguente identità $(xe^x)^{(n)} = (x+n)e^x$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbf{R}$.

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
 2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**
-

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x|-1}}{x},$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (4 punti)

Studiare in $(0, 0)$ la continuità, la derivabilità e la differenziabilità della funzione

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[\log(1+x) - \sin(x)]}{1 - \cos(x)}$$

Esercizio 4 (4 punti)

Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|2\alpha + 1|^k}{k!}.$$

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{1+x^2} = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere l'enunciato del teorema della permanenza del segno per limiti di funzioni reali di una variabile reale.

.....

Domanda 2 (3 punti)

Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$z^{16} = 2i.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Dimostrare per induzione la seguente identità

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
 2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**
-

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = |x|e^{x^2-1},$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (4 punti)

Dopo aver disegnato l'insieme di definizione della seguente funzione di due variabili

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sin(x - y)}$$

studiarne continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine.

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2 + 1)[e^{\sqrt{x-1}} - \cos(x-1)^2]\sqrt{x-1}}{\log(x) - \sin(x-1)}$$

Esercizio 4 (4 punti)

Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha + 1}{2^{\alpha n + 1}}.$$

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2 + 1}{2y}(x^2 + 1).$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere la definizione di derivata di una funzione reale di variabile reale e sua interpretazione geometrica.

.....

Domanda 2 (3 punti)

Risolvere la seguente equazione in campo complesso

$$(z + 1)^{16} = z(z + 1)^{14}.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ che

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

per ogni $a > -1$.

.....
 COGNOME E NOME MATRICOLA

E1	E2	E3	E4	E5	D1	D2	D3

.....
 FIRMA

ANALISI MATEMATICA I (12 CFU) - Canale I 25/06/19
 Ingegneria Informatica e Automatica - Sapienza Università di Roma

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
 2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**
-

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = x \ln(|x|),$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (4 punti)

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{x^2} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$$

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x) - (e^x - 1)^2}{\arctan(x^3) - \sin(x^4)}$$

Esercizio 4 (4 punti)

Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \arctan(n^\alpha).$$

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Calcolare, se esistono, i punti stazionari della seguente funzione di due variabili specificando, mediante valutazione della matrice Hessiana, la natura di tali punti:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 1.$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere la definizione di equazione differenziale ordinaria di ordine 1 e di relativo problema di Cauchy.

.....

Domanda 2 (3 punti)

Risolvere la seguente equazione in campo complesso e, se esiste, si disegni la soluzione nel piano di Gauss:

$$z^2 + 2|z|^2 + \bar{z}^2 = 0.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Ricordando che $|x + y| \leq |x| + |y|$, dimostrare la seguente disuguaglianza

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|,$$

utilizzando il principio di induzione (su $n \in \mathbb{N}$).

E1	E2	E3	E4	E5	D1	D2	D3

.....
COGNOME E NOME

.....
MATRICOLA

.....
FIRMA

ANALISI MATEMATICA I (12 CFU) - Canale I

04/09/19

Ingegneria Informatica e Automatica - Sapienza Università di Roma

ISTRUZIONI

1. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto solo su questi fogli**.
2. **Non è ammesso l'uso di appunti, libri e calcolatrici.**

Esercizio 1 (5 punti)

Data la funzione

$$f(x) = -\ln\left(\frac{1}{|x^2 + 1|}\right),$$

determinarne l'insieme di definizione e il segno; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Esercizio 2 (4 punti)

Dopo aver disegnato il sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}^2$, calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

.....

Esercizio 3 (4 punti)

Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \ln(x) - (e^{x-1} - 1)^2}{(x-1)^3}.$$

Esercizio 4 (4 punti)

Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(e^{n^\alpha} - 1 \right) \left(\frac{n+1}{n+2} \right).$$

.....

Esercizio 5 (4 punti)

Calcolare, se esistono, i punti stazionari della seguente funzione di due variabili specificando la natura di tali punti:

$$f(x, y) = x^4 - y^4.$$

Domanda 1 (3 punti)

Scrivere la definizione di limite per una funzione reale di una variabile reale.

.....

Domanda 2 (3 punti)

Calcolare tutte le soluzioni seguente equazione in campo complesso:

$$z^{13} - i = 0.$$

.....

Domanda 3 (3 punti) Utilizzando il principio di induzione (su $n \in \mathbb{N}$), dimostrare la seguente disuguaglianza

$$(1 + a)^{n-1} \geq na + 1 - a,$$

per ogni $a \geq -1$.