SOLUZIONE DELLA PROVA SCRITTA

Esercizio 1 (5 punti)
Data la funzione
$$f(x) = x(1 - \log x) + |x - 1|,$$
determinarne l'insieme di definizione; stabilire se $f(x)$ è una funzione pari, dispari, periodica o nessuna delle precedenti; studiare la continuità di $f(x)$ nel suo insieme di definizione, calcolare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di non derivabilità, eventuali massimi e minimi relativi. Tracciare un grafico qualitativo della funzione.

Soluzione. Per le proprietà dei domini della somma, prodotto e composizione di funzioni, l'insieme di definizione di $f(x)$ è
$$dom f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (0, +\infty).$$
$f(x)$ non è una funzione pari, nè dispari in quanto il suo dominio non è simmetrico rispetto all'origine e non è periodica, ma è continua nel suo insieme di definizione perché somma, prodotto e composizione di funzioni continue in tutto il loro insieme di definizione. I punti di frontiera dell'insieme di definizione di $f(x)$ sono 0 e $+\infty$. Osserviamo che
$$f(x) = \begin{cases} x(1 - \log x) + x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ x(1 - \log x) - x + 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$
In particolare $f(x) = x(1 - \log x) - x + 1$ definitivamente per $x \to 0^+$ e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1 - \log x) - x + 1 = \lim_{x\to 0^+} -x \log x + 1.$$
Il limite sopra presenta una forma indeterminata $0 \cdot +\infty$, che si può risolvere applicando la sostituzione $-\log x = t$. Infatti per $x \to 0^+$ si ha $t \to +\infty$ e quindi
$$\lim_{x\to 0^+} x(-\log x) + 1 = \lim_{t\to +\infty} e^{-t}\, t + 1 = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{e^t} + 1 = 1$$
per la gerarchia degli infiniti (e l'algebra dei limiti finiti). In alternativa il limite $\lim_{x\to 0^+} -x \log x$ può essere calcolato applicando il teorema di de l'Hopital
$$\lim_{x\to 0^+} -x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$
(osservando che le ipotesi del teorema di de l'Hopital sono rispettate perchè le funzioni al numeratore e al denominatore sono derivabili e i loro limiti esistono e sono uguali). Il limite $\lim_{x\to 0^+} -x \log x + 1 = 1$ segue quindi dall'algebra dei limiti finiti. Il fatto che $\lim_{x\to 0^+} f(x) \in \mathbb{R}$, insieme alla continuità della funzione nel suo dominio, implica che $f(x)$ non ammette asintoti verticali.
D'altra parte $f(x) = x(1 - \log x) + x - 1$ definitivamente per $x \to +\infty$ e quindi
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x(1 - \log x) + x - 1 = -\infty$$
per l'algebra parziale dei limiti infiniti (in quanto $f(x)$ è somma, prodotto e composizione di funzioni infinite per $x \to +\infty$). Poichè il dominio di $f(x)$ è limitato inferiormente, possiamo anche escludere la presenza di asintoti orizzontali. La funzione non ammette asintoti obliqui (per $x \to +\infty$) infatti
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} (1 - \log x) + 1 - \frac{1}{x} = -\infty$$
sempre per l'algebra parziale dei limiti infiniti. Osserviamo che $|x - 1|$ è derivabile in tutto $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ quindi $f(x)$ è derivabile in $(0, +\infty) \setminus \{1\}$ in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. In particolare
$$f'(x) = \begin{cases} -\log x + 1 & \text{se } x > 1 \\ -\log x - 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$
La funzione $f(x)$ non è derivabile se $x = 1$. Per dimostrarlo osserviamo che
$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} -\log x + 1 = 1$$
e
$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} -\log x - 1 = -1$$
ossia
$$f'_+(1) \neq f'_-(1);$$
poiché una funzione è derivabile in un punto se e solo se le sue derivate destra e sinistra coincidono, otteniamo che $f(x)$ non è derivabile in 1 e, in particolare, che 1 è punto angoloso. Dallo studio del segno di $f'(x)$ otteniamo che $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (1, e)$, in particolare $f(x)$ è crescente in $(0, \frac{1}{e}) \cup (1, e)$, è decrescente in $(\frac{1}{e}, 1) \cup (e, +\infty)$ ed ha due punti stazionari in $x = \frac{1}{e}$ e $x = e$, che sono entrambi punti di massimo relativo. Dallo studio della monotonia della funzione, deduciamo anche che il punto di non derivabilità 1 è un minimo relativo. Poiché nessun punto di frontiera appartiene a $dom f$, possiamo concludere che i soli punti di estremo relativo sono $\frac{1}{e}$, 1 ed e. □

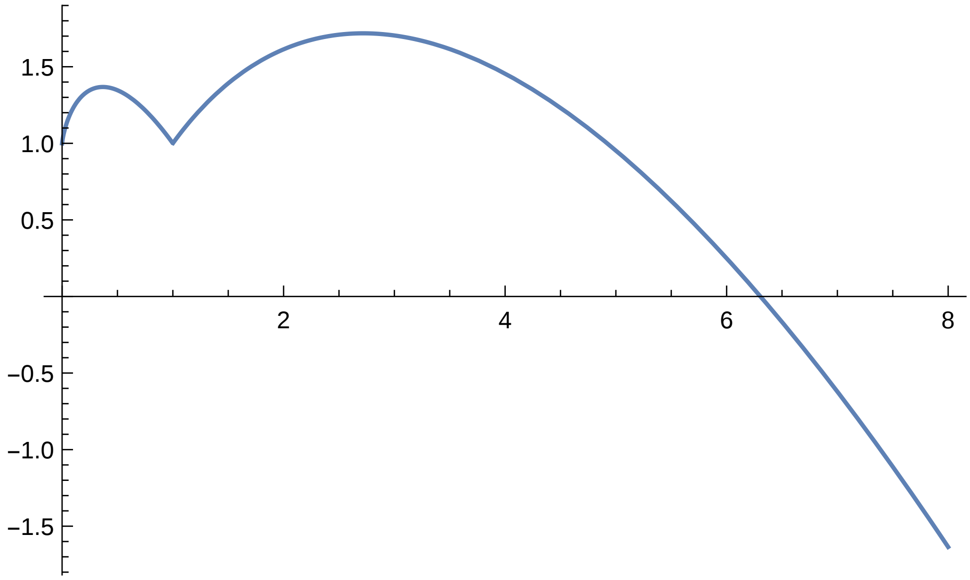

Grafico qualitativo di $f(x) = x(1 - \log x) + |x - 1|$.

Esercizio 2 (4 punti)
Calcolare il seguente limite utilizzando gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\sqrt{\cos x} + x)x + \arctan(x^3)}{\sin^2 x}$$

Soluzione. Osserviamo che per $x \to 0$ abbiamo $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ e conseguentemente

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} \quad \text{per } x \to 0$$

Posto $y = y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ abbiamo che $y \to 0$ per $x \to 0$, quindi

$$\sqrt{\cos(x)} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)} = \sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y + o(y) = 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) + o\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$$

per $x \to 0$. Procedendo con analoghi cambi di variabili (e opportune semplificazioni dei simboli di Landau) otteniamo (sempre per $x \to 0$)

$$\log(\sqrt{\cos(x)} + x) = \log(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) + x) = x + o(x),$$

$\arctan(x^3) = x^3 + o(x^3)$ e $\sin^2 x = (x + o(x^2))^2 = x^2 + o(x^3)$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\sqrt{\cos x} + x)x + \arctan(x^3)}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x + o(x))x + x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^3)} = 1.$$

□

. . . .

Esercizio 3 (4 punti)
Classificare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) := 4x^3 + 2xy + y^2.$$

Soluzione. Per definizione, i punti stazionari di una funzione in due variabili sono le soluzioni dell'equazione $\nabla f(x, y) = (0.0)$. Poichè $f_x(x, y) = 12x^2 + 2y$ e $f_y(x, y) = 2x + 2y$, i punti stazionari sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} 12x^2 + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

ossia $\bar{x}_1 = (0, 0)$ e $\bar{x}_2 = (\frac{1}{6}, -\frac{1}{6})$. Per classificare $\bar{x}_1$ e $\bar{x}_2$ calcoliamo la matrice hessiana di $f(x, y)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24x & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

E osserviamo che gli autovalori di $H(\bar{x}_1) = H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ sono $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$: poichè sono discordi $\bar{x}_1$ è un punto di sella. Gli autovalori di $H(\bar{x}_2) = H(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ sono $3 + \sqrt{5}$ e $3 - \sqrt{5}$: poichè sono entrambi positivi $\bar{x}_2$ è un punto di minimo relativo.

□

Esercizio 4 (4 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = t\cos(t^2)x + e^{\frac{1}{2}\sin(t^2)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare al primo ordine non-omogena della forma $x' = a(t)x + b(t)$, la cui soluzione generale é $x(t) = K(t)e^{A(t)} + Ce^{A(t)}$, dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$, $K(t)$ è una primitiva di $b(t)e^{-A(t)}$ e $C \in \mathbb{R}$. In particolare, l'integrale indefinito di $a(t) = t\cos(t^2)$ è

$$\int t\cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\int 2t\cos(t^2)dt = \frac{1}{2}\sin(t^2) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

(l'integrale è stato calcolato applicando la sostituzione $y = t^2$) pertanto $A(t) = \frac{1}{2}\sin(t^2)$ è una primitiva di $a(t)$. Ora,

$$\int b(t)e^{-A(t)}dt = \int e^{\frac{1}{2}\sin(t^2)}e^{-\frac{1}{2}\sin(t^2)}dt = \int 1\ dt = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

pertanto $K(t) = t$ è una primitiva di $b(t)e^{-A(t)}$. Abbiamo quindi

$$x(t) = te^{\frac{1}{2}\sin t^2} + Ce^{\frac{1}{2}\sin t^2}$$

Imponendo la condizione iniziale $x(0) = 0$ otteniamo $C = 0$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy è $x(t) = te^{\frac{1}{2}\sin t^2}$. □

....

Esercizio 5 (4 punti)
Dopo aver verificato la condizione necessaria di convergenza per serie numeriche, studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+\sqrt{k}}$$

Soluzione. La condizione necessaria di convergenza per una serie numerica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ è che la successione a_k dei termini della serie sia infinitesima per k che tende a $+\infty$. In questo caso $a_k = (-1)^k\frac{1}{k+\sqrt{k}}$ e abbiamo

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(-1)^k\frac{1}{k+\sqrt{k}} = 0$$

per l'algebra parziale dei limiti infiniti e per il teorema del confronto.

Ora osserviamo che la serie è una serie della forma $(-1)^k b_k$ dove $b_k = \frac{1}{k+\sqrt{k}}$. Per verificare la convergenza (semplice) della serie è sufficiente osservare che la serie è convergente perché verifica le condizioni del criterio di Leibnitz. Infatti:

- la serie è a segni alterni, cioè b_k è una successione (definitivamente) positiva: infatti $b_k = \frac{1}{k+\sqrt{k}} > 0$ per ogni $k > 0$;
- la successione b_k è infinitesima, e questo è stato verificato sopra;
- la successione b_k è (definitivamente) decrescente: infatti $b_k > b_{k+1}$ se e solo se

$$\frac{1}{k+\sqrt{k}} > \frac{1}{k+1+\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow k+1+\sqrt{k+1} > k+\sqrt{k} \Leftrightarrow 1+\sqrt{k+1} > \sqrt{k}$$

e l'ultima diseguaglianza è verificata per ogni $k > 0$ (per la monotonia della funzione radice). In alternativa possiamo osservare che b_k è l'inversa aritmetica della somma di due funzioni strettamente crescenti e quindi è decrescente.

□

Domanda 1 (3 punti)
Sia $X \subset \mathbb{R}$:

- scrivere la definizione di punto di accumulazione di X;
- scrivere la definizione di limite di una funzione f con dominio X e codominio $\mathbb{R}$.

Soluzione.

- Un punto x_0 appartenente alla retta estesa $\mathbb{R}^*$ si dice di accumulazione per X se per ogni intorno U di x_0 si ha $X \cap U \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.
- Sia x_0 un punto di accumulazione per X. Un elemento l della retta estesa $\mathbb{R}^*$ si dice limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ se per ogni intorno V di l, $f(x) \in V$ definitivamente per $x \to x_0$, ossia se per ogni intorno V di l esiste un intorno U di x_0 tale che se $x \in X \cap U \setminus \{x_0\}$ allora $f(x) \in V$.

□

....

Domanda 2 (3 punti)
Utilizzando la teoria dell'integrazione in due variabili, dimostrare che l'area di un cerchio di raggio 2 è 4π.

Soluzione. Sia $\Omega(= \bar{B}_2(0))$ il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine e osserviamo che

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\} = \{(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \mid \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

Poiché la misura di un insieme misurabile in $\mathbb{R}^2$ coincide con la sua area, è sufficiente mostrare che $|\Omega| = \int_\Omega 1dxdy = 4\pi$. Applicando il cambio di coordinate da cartesiane a polari (e ricordando di moltiplicare la funzione integranda per il determinante della matrice Jacobiana associata al cambio di coordinate) abbiamo

$$\int_\Omega 1dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 1 \cdot \rho \, d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\rho^2 \Big|_0^2 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \, d\theta = 4\pi$$

e questo conclude la dimostrazione. □

....

Domanda 3 (3 punti) Dimostrare per induzione che $n! \leq n^n$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzione. Verifichiamo le seguenti condizioni:

- base induttiva: posto $n = 1$ abbiamo $1! = 1^1$.
- passo induttivo: mostriamo che per ogni $n \geq 1$ vale la seguente implicazione

$$n! \leq n^n \;\Rightarrow\; (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

ossia assumendo come ipotesi induttiva $n! \leq n^n$ possiamo dimostrare $(n+1)!(n+1)^{n+1}$. A tal fine osserviamo che poiché $n \geq 0$ (e quindi $n^n < (n+1)^n$)

$$n! \leq n^n \;\Rightarrow\; n! \leq (n+1)^n \;\Rightarrow\; (n+1)n! \leq (n+1)(n+1)^n \;\Rightarrow\; (n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$.

Poiché abbiamo dimostrato sia la base induttiva che il passo induttivo, la diseguaglianza $n! \leq n^n$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$) segue dal principio di induzione. □