**ANALISI MATEMATICA II**
**Laurea in Ingegneria Informatica, Automatica,Telecomunicazioni**

**Esame dell' 8 gennaio 2009**

**Nome e Cognome** ________________________________________ **matricola** __________________

**Firma** ________________________________________________________________

**MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE**

**E 1** Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2+9)(z^2+1)}dz$$

dove $\gamma$ é la curva bordo dell'insieme T definito da $T = \{z = x + iy \in C : |x| \leq 2, \;\; x - 2 \leq y \leq x + 2\}$

Soluzione

I punti singolari per la funzione che cadono entro la curva sono $i$ e $-i$, entrambi poli del primo ordine. Per il teorema dei residui il valore dell'integrale $I$ è dato da

$$I = 2\pi i\left(res(\frac{e^z}{(z^2+9)(z^2+1)}, i) + res(\frac{e^z}{(z^2+9)(z^2+1)}, -i)\right) = \frac{\pi}{8}(e^i - e^{-i}) = \frac{\pi}{4} isin1$$

**E 2** Usando la trasformata di Laplace, trovare $y(t)$ che risolva per $t \geq 0$ il seguente problema

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) \star t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si ricordi che il simbolo $\star$ denota il prodotto di convoluzione.

Soluzioni

Denotata con $Y(s)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$, si ha

$$s^2 Y(s) - 1 = \frac{Y(s)}{s^2}$$

$$\left(s^2 - \frac{1}{s^2}\right) Y(s) = 1$$

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1} = \frac{s^2}{(s-1)(s+1)(s-i)(s+i)}$$

$$s_1 = 1,\ s_2 = -1,\ s_3 = i,\ s_4 = -i$$

$$y(t) = \sum_{j=1}^{4} res\left(\frac{e^{st}s^2}{(s^4-1)}, s_j\right) =$$

$$res\left(\frac{e^{st}s^2}{(s^4-1)}, 1\right) + res\left(\frac{e^{st}s^2}{(s^4-1)}, -1\right) + res\left(\frac{e^{st}s^2}{(s^4-1)}, i\right) + res\left(\frac{e^{st}s^2}{(s^4-1)}, -i\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin ht$$

Si noti che si é usata qui la formula di inversione della trasformata ( verificarne la validitá ).

**E 3** Calcolare, motivandolo, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{\frac{1+x^2}{n}}\,dx$$

Soluzioni

La successione delle funzioni integrande converge uniformemente alla funzione identicamente uguale a 1 nell'intervallo di integrazione.

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}(e^{\frac{1+x^2}{n}}-1)=\lim_{n\to+\infty}(e^{\frac{2}{n}}-1)=0$$

Dunque si puó applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e concludere che il limite vale 1.

**D 1**

(i) Serie bilatere di centro $z_0$.

Descrivere il legame che esiste fra i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione $f(z)$ attorno a $z_0$ punto singolare e il tipo di singolaritá.

(ii) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{cosz}{z^2} + \frac{z-1}{z+5}$$

in un intorno forato di $z_0 = 0$ precisando il raggio di tale intorno e scrivendo esplicitamente la parte singolare e almeno i primi quattro termini della parte regolare.Di che tipo di singolaritá si tratta e quanto vale il residuo di $f(z)$ in $z_0$?

Soluzione (ii)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{n+1}}{5^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^n}{5^{n+1}}$$

Parte singolare: $\frac{1}{z^2}$.

Polo doppio con $res(f(z), 0) = 0$

Parte regolare: $(-\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{25})z + (\frac{1}{4!} - \frac{1}{25} - \frac{1}{125})z^2 + (\frac{1}{125} + \frac{1}{625})z^3 + ....$

**D 2**

(i) Funzioni L-trasformabili. Definizione di ascissa di convergenza, di semipiano di convergenza e di trasformata di Laplace.

(ii) Stabilire, motivandolo, se le seguenti funzioni sono trasformate di Laplace di un segnale ed eventualmente ricostruirlo:

$$F(s) = \frac{1}{sen(s-2)}$$

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 - i}$$

Soluzione (ii) La prima funzione non é trasformata di alcun segnale perché non é olomorfa in nessun semipiano $Re(s) > \alpha$, visto che ha come punti singolari i punti $z_k = 2 + k\pi$ con k intero relativo.

Per quanto riguarda la seconda funzione, $\frac{1}{s^2-i}$ é trasformata di un segnale $f(t)$ che si puó ricostruire con la formula di inversione.

$$f(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)t} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)t}}{\sqrt{2}(1+i)}$$

Dunque

$$\frac{e^{-2s}}{s^2 - i}$$

é la trasformata di $f(t-2)$ ( segnale ritardato ).