ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica, Automatica, Telecomunicazioni

Esame dell' 8 gennaio 2009

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale curvilineo di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z^2-25)(z^2-1)}dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme T definito da $T = \{z = x + iy \in C : |y| \leq 1,\ \ y - 2 \leq x \leq y + 2\}$

Soluzione

I punti singolari per la funzione che cadono entro la curva sono 1 e -1, entrambi poli del primo ordine. Per il teorema dei residui il valore dell'integrale I è dato da

$$I = 2\pi i\left(res\left(\frac{e^z}{(z^2-25)(z^2-1)}, 1\right) + res\left(\frac{e^z}{(z^2-25)(z^2-1)}, -1\right)\right) = \frac{\pi}{12}\sin 1$$

E 2 Usando la trasformata di Laplace, trovare $y(t)$ che risolva per $t \geq 0$ il seguente problema

$$\begin{cases} y''(t) = 2(y(t) \star sent) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Si ricordi che il simbolo $\star$ denota il prodotto di convoluzione.

Soluzioni

Denotata con $Y(s)$ la trasformata di Laplace di $y(t)$, si ha

$$s^2 Y(s) - 1 = \frac{2Y(s)}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^4 + s^2 - 2} = \frac{s^2 + 1}{(s^2 + 2)(s^2 - 1)}$$

da cui, usando il metodo della decomposizione in fratti semplici, si ha

$$y(t) = \frac{2}{3} senh(t) + \frac{1}{3\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t)$$

E 3 Calcolare, motivandolo, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 e^{-n^2(1+x^2)}dx$$

Soluzioni

La successione delle funzioni integrande converge uniformemente alla funzione identicamente uguale a 0 nell'intervallo di integrazione.

Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}(e^{-n^2(1+x^2)}) = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^2} = 0$$

Dunque si puó applicare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale e concludere che il limite vale 0.

D 1

(i) Serie bilatere di centro z_0.

Scrivere la forma dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ attorno a z_0, punto singolare. Dedurre che, se z_0 é una singolaritá eliminabile, lo sviluppo si riduce a quello di Taylor.

(ii) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1 - cosz}{z^3} + \frac{z+1}{z-3}$$

in un intorno forato di $z_0 = 0$, precisando il raggio di tale intorno e scrivendo esplicitamente la parte singolare e almeno i primi quattro termini della parte regolare. Di che tipo di singolaritá si tratta e quanto vale il residuo di $f(z)$ in z_0?

Soluzioni (ii)

$$f(z) = \frac{1}{z^3} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n-3}}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

Parte singolare: $\frac{1}{2z}$.

Polo semplice con $res(f(z), 0) = \frac{1}{2}$

Parte regolare: $-\frac{1}{3} + (-\frac{1}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4!})z + (-\frac{1}{9} - \frac{1}{27})z^2 + (\frac{1}{6!} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81})z^3 + ...$

D 2

(i) Funzioni L-trasformabili. Definizione di ascissa di convergenza, di semipiano di convergenza e di trasformata di Laplace.

(ii) Stabilire, motivandolo, se le seguenti funzioni sono trasformate di Laplace di un segnale ed eventualmente ricostruirlo:

$$F(s) = \frac{1}{cos(s+3)}$$

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+i}$$

Soluzione (ii) La prima funzione non é trasformata di alcun segnale perché non é olomorfa in nessun semipiano $Re(s) > \alpha$, visto che ha come punti singolari i punti $s_k = -3 + \pi/2 + k\pi$ con k intero relativo.

Per quanto riguarda la seconda funzione, $\frac{1}{s^2+i}$ é trasformata di un segnale $f(t)$ che si puó ricostruire con la formula di inversione.

$$f(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)t} - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i)t}}{\sqrt{2}(1-i)}$$

Dunque

$$\frac{e^{-s}}{s^2+i}$$

é la trasformata di $f(t-1)$ (segnale ritardato).