ANALISI MATEMATICA II

Laurea in Ingegneria Informatica
Laurea specialistica in Ingegneria Informatica
Laurea in Ingegneria Gestionale
Laurea specialistica in Ingegneria Gestionale

Esame del 9 aprile 2010

Nome e Cognome ____ **matricola** ____________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

1 Esprimere come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi:

$$\int_0^{1/2} Log(1-2x)dx.$$

Soluzione:

$$\int_0^{1/2} Log(1-2x)dx = \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-2x)^{n+1}}{n+1} dx\,.$$

Su $[0,1/2]$ si ha convergenza uniforme della serie e quindi

$$\int_0^{1/2} Log(1-2x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-2)^{n+1}}{n+1} \int_0^{1/2} x^{n+1} dx =$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} \int_0^{1/2} x^{n+1} dx = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\,.$$

2 Si studi la convergenza puntuale della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{inz}\,.$$

e se ne calcoli la somma ove possibile.

Soluzione: La serie da studiare é una serie geometrica di ragione e^{iz} essendo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{inz} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{iz})^n\,.$$

Essa converge se $|e^{iz}| < 1$;

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = e^{-y} < 1$$

e quindi $y > 0$. Per $y > 0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{inz} = \frac{1}{1-e^{iz}}\,.$$

3

(i) Dare la definizione di serie di Laurent di una funzione f analitica in una corona circolare e scrivere la formula per i coefficienti di Laurent.

(ii) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3} sen(iz^2)$$

precisando la regione in cui vale e specificando la parte singolare e la parte regolare.

Soluzione: Si ha

$$f(z) = \frac{1}{z^3} sen(iz^2) = \frac{1}{z^3} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(iz^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2(2n+1)-3}.$$

Si ha $i^{2n+1} = i\, i^{2n} = i\,(-1)^n$ e quindi

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{i\,(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2(2n+1)-3} = \sum_{n \geq 0} \frac{i}{(2n+1)!} z^{4n-1} =$$

$$= \frac{i}{z} + \sum_{n \geq 1} \frac{i}{(2n+1)!} z^{4n-1}.$$

La regione in cui tale sviluppo vale é C^*. La parte regolare é

$$\sum_{n \geq 1} \frac{i}{(2n+1)!} z^{4n-1},$$

mentre la parte singolare é $\frac{i}{z}$.

4

(i) Si dia la definizione di residuo e si illustrino i diversi metodi per calcolarlo.

(ii) Si calcolino i residui della funzione

$$f(z) = \frac{sen(z+\frac{\pi}{4})}{z(z+\frac{\pi}{4})}$$

nelle sue singolarita' isolate.

Soluzione: Le singolarita' isolate sono $z = 0$ che e' un polo semplice e $z = \frac{\pi}{4}$ che e' una singolarita' eliminabile. Inoltre

$$res(f(z), 0) = \lim_{z \to 0} z \, \frac{sen(z+\frac{\pi}{4})}{z(z+\frac{\pi}{4})} = \frac{sen\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

e

$$res\Big(f(z), -\frac{\pi}{4}\Big) = 0.$$

5 Si risolva il seguente problema di Cauchy, usando la trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0 \\ \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: Il polinomio caratteristico e'

$$P(s) = (s-4)(s-1)$$

e la trasformata di Laplace di $y(t)$ e'

$$Y(s) = \frac{y(0)(s-5) + y'(0)}{(s-4)(s-1)} = \frac{s-4}{(s-4)(s-1)} = \frac{1}{s-1}$$

da cui

$$y(t) = e^t.$$